现代数学基础丛书

环与代数

● 刘绍学 著



科学出版社

现代数学基础丛书

环 与 代 数

科 学 出 版 社

1 9 9 7

内 容 简 介

本书综述了非交换结合环(代数)理论的基础，主要内容有：有限维代数的 Wedderburn 理论，极小条件环的 Artin 理论，一般环的 Jacobson 理论，关于 PI-代数的 Kaplansky 定理，Amitsur-Курош 的一般根论，以及关于 Goldie 环的基本结果.

读者对象为数学专业高年级学生、研究生，数学教师和其他数学工作者.

现代数学基础丛书

环与代数

刘 绍 学 著

责任编辑 钱介福

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

新世纪印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983 年 3 月第一版 开本：850×1168 1/32

1997 年 8 月第三次印刷 印张：9 3/8

印数：8681－11680 字数：242,000

ISBN 7-03-005994-8/O·929

定价：18.50 元

序　言

本书是在我为研究生讲授环论课时所用讲义的基础上写成的.

这是一本介绍非交换结合环理论的基础的书. 结合环在一般(即不一定是结合的)环中占居中心地位; 其他重要的非结合环类,如Lie环,Jordan环, 交错环, 几乎都和结合环有相同的发展过程.

非交换结合环论的发展过程, 可以设想分为以下三个阶段: (一) 关于有限维代数的研究, Albert(1) 可以看作是这方面的总结;(二) 关于有极小条件的环的研究, Artin等(1)可以看作是这方面的总结;(三) 关于一般(即不附加有限条件) 环的研究, 以及关于有极大条件环的研究,并广泛地使用同调代数的工具,Jacobson(2)可以看作是前者的总结, 而 Faith(1)可以看作是后者的总结.

在本书中, 我们避开同调代数而介绍这三个发展阶段的基本内容. 在叙述上,我们基本上按照环论原来的发展过程依次介绍. 当然某些早期结果可由后期较一般的结果直接得出. 然而我们没有去避开这些重复. 这是因为:某些重复,以及从这些重复中能看到的发展过程的痕迹,对初学者来说,是很有好处的.

Wedderburn 的结构理论对整个环论的影响是很大的,我们选择的内容基本上都是围绕这一理论的, 为的是使读者对它有一个全面深入的理解.

我们假定读者已经熟悉抽象代数、线性代数以及域的 Galois 理论(后者只在第三章中用到).

本书的目的是为进一步学习环论中的专门著作和有关论文打下一个良好的基础. 书后附有参考书目, 书中顺便介绍一些未解

决的问题，并介绍一些文献，有些是属于经典性的，有些则能提示我们在环论中如何提出问题.

使用本书作为教材可有下面几种方案:(一) 每周四节课两学期可全部讲完，(二)选用前四章或前五章作为结合代数课，每周四节课一学期可讲完，(三) 选用后五章（或去掉第十章）作为环论课，每周四节课一学期可讲完，(四) 选用第六、七、九章作为环的根论课，每周三节课一学期可讲完，(五) 选用第一、二、四章作为有限代数课，每周二节课一学期可讲完.

作者是从 А.Г. Курош 教授和张禾瑞教授那里学习环与代数的，在此对他们表示怀念和感谢.在编写时主要参考了张禾瑞(1)，Albert(1)，Artin(1)，Jacobson(1)，(2)，Herstein(1)，Curtis (1)，Kaplansky(1)等等.

万哲先同志一直鼓励我写一本关于环论的书，聂灵沼同志对选材提出了宝贵意见，谢邦杰、许永华同志寄来了我向他们要的材料，吴品三同志仔细阅读了每一个证明，提出了修改意见并补充了一些习题，在此一并表示感谢. 进修教师谢冰璋、徐忠明、陈维新、厉立德、王春森、马志大、马文新等同志以及研究生张英伯、王成德在学习上述讲义的过程中都提出了许多修改意见，在此也一并表示感谢.

书中一定会有不当之处，殷切地希望读者指正.

作　者

于北京师范大学

目　录

第一章　有限结合代数的基本概念

§1　一些基本概念与定义

在这一节中，我们简单介绍一下关于代数的最基本的定义．关于群与环的相应概念认为是已知的、熟悉的．

定义 1.1.1　域 F 上一个向量空间 A 叫作域 F 上的代数，如果除数乘（用 αa 表示，$\alpha\in F$，$a\in A$）和 A 的加法运算（用 $+$ 表示）外，A 中还定义有一个乘法运算（用 $\cdot$ 表示或用 ab 表示运算结果，$a,b\in A$）满足下列条件：

i) $a\cdot(b+c)=ab+ac$，$(b+c)\cdot a=ba+ca$，$\forall a,b,c\in A$[1]；

ii) $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$，$\forall a,b\in A$，$\forall\alpha\in F$．

如果 A 是 F 上有限维空间，就称 A 为 F 上有限（维）代数．

如果代数 A 中的乘法适合结合律，即若有 $(ab)c=a(bc)$，$\forall a,b,c\in A$，则称 A 为结合代数．

如果代数 A 中乘法适合条件：$ab=ba$，$\forall a,b\in A$，则称 A 为交换代数．

如果代数 A 中的乘法适合条件：$a^2=0$，$(ab)c+(bc)a+(ca)b=0$，$\forall a,b,c\in A$，则称 A 为 Lie 代数

如果代数 A 中乘法适合条件：$ab=ba$，$(a^2b)a=a^2(ba)$，$\forall a,b,c\in A$，则称 A 为 Jordan 代数．

如果代数 A 中乘法适合条件：$a(ab)=(aa)b$，$a(bb)=(ab)b$，$\forall a,b\in A$，则称 A 为交错代数．

设 A 是域 F 上的代数，不一定是有限维的，也不一定是结合代数．与群的子群、环的子环等概念相平行的可定义 A 的子代数

1）指对 A 中所有的 a，b，c．其中 $\forall$ 指"所有的"．

的概念。与群、环中相平行的还可定义代数的同构、代数的同态等概念。

定义 1.1.2 设 A 是域 F 上的代数，$B\subseteq A$，B 不空。如果

i) B 是 A 的子空间，

ii) B 对 A 中的乘法是封闭的，即有

$$bc\in B,\ \forall b,c\in B,$$

则称 B 是 A 的子代数.

易见结合（或 Lie- 或 Jordan-）代数的子代数本身仍是结合（或 Lie- 或 Jordan-）代数. 有限代数的子代数仍是有限代数.

设 X 是代数 A 的一个子集. A 中含有 X 的一切子代数的交当然仍是一个子代数，称之为由 X 生成的子代数，记作 $\langle X\rangle$. 易见 $\langle X\rangle$ 是由一切形如 $\alpha x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$，$\alpha\in F$，$x_{i_j}\in X$ 的有限和组成的.

定义 1.1.3 设 A, B 都是域 F 上的代数，φ 是集 A 到 B 内的一个对应，如果 φ 保持运算，即若有

i) $(ab)\varphi=(a\varphi)(b\varphi)$,

ii) $(\alpha a)\varphi=\alpha(a\varphi)$,　　$\forall a,b\in A$, $\forall \alpha\in F$,

iii) $(a+b)\varphi=a\varphi+b\varphi$,

则称 φ 是 F 上代数 A 到 F 上代数 B 内的一个同态对应，或简称代数 A 到代数 B 的一个同态对应.

如果 φ 是代数 A 到代数 B 的一个同态对应，且知 φ 还是集 A 到 B 上的对应，则称 φ 为代数 A 到 B 的一个满同态对应，此时记 $A\sim B$.

如果 φ 是代数 A 到 B 的满同态对应，且知 φ 还是集 A 到 B 上的一一对应，则称 φ 为代数 A 到 B 的同构对应. 此时记作 $A\simeq B$.

如果 φ 是代数 A 到代数 B 的一个子代数上的同构对应，则称 φ 为代数 A 到 B 的入射同态对应或简称入射对应. 并称 A 同构嵌入于 B.

易见，若已知 $A\sim B$，则若 A 是结合(Lie, Jordan, 交换，有限)代数；B 也必是. 反过来，一般是不对的，即若已知 B 是结合

的，A当然不一定是结合的.

与代数的同态对应密切有关的是代数的理想概念，这是和群的正规子群与环的理想相平行的概念.

定义 1.1.4 设φ是代数A到代数B的一个同态对应，称A的子集$K=\{x\in A\mid x\varphi=0\}$为同态$\varphi$的核.

定义 1.1.5 说$K\subseteq A$是代数A的理想，如果

i）K是A的子代数，

ii）$KA\subseteq K$，$AK\subseteq K$[1].

和环的情况完全类似地可以证明，域F上代数A的同态对应的核是A的理想. 反过来，对于F上代数A的任意理想I可引进集A的一个等价关系$\sim$：$a,b\in A$，$a\sim b$当且仅当$a-b\in I$. 用$\bar{a}$表示a所在的$\sim$等价类，而用$\bar{A}$表示一切$\bar{a}$，$a\in A$，的集. 在$\bar{A}$中引入下列运算：$\alpha\bar{a}=\overline{\alpha a}$，$\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$，$\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{ab}$，$\alpha\in F$，$\bar{a},\bar{b}\in\bar{A}$. 利用理想$I$的性质不难验证上述定义是合理的，即$\alpha$，$\bar{a}$，$\bar{b}$的运算结果$\overline{a+b}$，$\overline{ab}$，$\overline{\alpha a}$与代表$a,b$之选择无关. 与我们熟悉的商空间和商环的情况一样，可验证$\bar{A}$作成F上的一个代数. 这样得到的代数$\bar{A}$，将称之为**代数A关于理想I的商代数**或简称为**A的商代数**. 令

$$\varphi:\ A\to\bar{A}$$
$$a\mapsto\bar{a}\text{[2]},$$

则不难证明φ是代数到其商代数$\bar{A}$上的满同态对应，φ的核恰是定义等价关系$\sim$时用的那个理想I. 我们把这样定义的φ，和环的情形一样，称之为代数A到其商代数$\bar{A}$上的**自然同态对应**. 为了指明理想I，常将$\bar{A}$记作A/I，$\bar{a}=a+I$.

与群或环的同态基本定理完全平行的有下述关于代数的同态基本定理，同构定理. 我们略去其证明.

定理 1.1.1 设A是域F上的代数，则

i）A的商代数$\bar{A}$是A的同态像，即有$A\sim\bar{A}$，

1）KA表示一切形如xa，$x\in K$，$a\in A$，的元素的有限和.

2）指φ是集A到$\bar{A}$的对应，而具体对应法则是$a\mapsto\bar{a}$，$a\in A$.

ii) A 的任意同态像 B，即若 $A\sim B$，则代数 B 必和 A 的一个商代数同构.

定理 1.1.2 设 φ 是代数 A 到代数 A' 上的满同态对应，φ 的核是 I，设 $B\supseteq I$ 是 A 的理想，则 $B\varphi$[1] $=B'$ 是 A' 的理想且 $A/B\simeq A'/B'$，其间的同构对应可取作 $a+B\mapsto a\varphi+B'$，并称之为 A/B 与 A'/B' 间的自然同构对应.

定理 1.1.3 设 A 是代数，B 是 A 的子代数而 I 是 A 的理想，则

i) $B\cap I$ 是 B 的理想，

ii) $(B+I)/I\simeq B/(B\cap I)$，其间的同构对应可取作 $b+I\mapsto b+(B\cap I)$.

这些定理的证明可仿照关于群和环的平行定理的证法去证明.

最后我们给出下面定义：

定义 1.1.6 代数 A 的子代数 B，若满足条件 $AB\subseteq B$($BA\subseteq B$)，就称之为代数 A 的左(右)理想.

§2 有限结合代数的例子

以下我们将只讨论有限结合代数，如无特别声明，“代数”将永远指有限结合代数.

在讨论任意代数之前，先看一批具体代数的例子.

代数与环的差别在于环的加法群只是一个 Abel 群，而代数的加法群是域 F 上的向量空间，这样，代数就比环有一个结构简单得多的加法群. 在选定向量空间 A 的一个基：$a_i, i=1,\cdots,n$ 后，A 中任意元素 a 都可唯一地表成

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i,\ \alpha_i\in F.$$

---

1) 指 B 在 φ 下的象，即 $B\varphi=\{x\in A' \mid x=b\varphi, b\in B\}$.

若 $b\in A$ 而 $b=\sum\beta_i a_i$，则

$$ab=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j(a_ia_j).$$

这样，基元 a_i 之间的乘法表就完全确定了整个代数 A 的乘法运算了。易见 A 是结合代数，当且仅当基元之间的乘法满足结合律，即

$$(a_ia_j)a_k=a_i(a_ja_k),\ \forall i,j,k.$$

因此，要给出域 F 上 n 维结合代数 A，只要给定 F 和维数 n，再给定 A 的某个基的基元间满足结合律的乘法表就行了.

例 1 取 $F=A$ 为全体实数，对通常数的加法和乘法，A 是实数域 F 上的一维结合代数. 易见这个代数是可除代数，即有 $1\in A$，使 $1a=a1=a$，$\forall a\in A$，且对任意 $0\neq a\in A$，$\exists$ 唯一的 $b\in A$，使得 $ab=ba=1$. 或简言之，说一个代数 A 是可除代数，指 $\{A\backslash 0,\cdot\}$ 是一个群.

例 2 取 F 为实数域而 C 为复数域，对通常数的加法和乘法，C 是 F 上二维结合代数. 易见它也是可除代数.

例 3 取 F 为实数域，Q 为 F 上四维空间以 $1,i,j,k$ 为基，定义基元间的乘法表如下：

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

直接检验可知，基元之间的乘法有结合律，因而 Q 是结合代数. 1 是 Q 的单位元. Q 中元称为**四元数**.

附注 Q 中单位元 1 和域 F 中的单位元 1 是两个不同元素，然而用同样的符号将不致引起混乱.

Q 还是可除代数，这可由下述方法证得：Q 的任意元 a 可唯一地表成

$$a=\alpha_1\cdot 1+\alpha_2\cdot i+\alpha_3\cdot j+\alpha_4\cdot k,\alpha_1,\cdots,\alpha_4\in F,$$

规定

$$\bar{a}=\alpha_1\cdot 1-\alpha_2\cdot i-\alpha_3\cdot j-\alpha_4\cdot k,$$

称之为 a 的共轭元．直接计算可得与复数类似的结果：$a\cdot\bar{a}=\bar{a}\cdot a=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2)\cdot 1$．将系数 $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2$ 记作 $|a|$，称之为四元数 a 之模．若 $a\neq 0$，则 $|a|\neq 0$，此时有

$$a\cdot(|a|^{-1}\bar{a})=(|a|^{-1}\bar{a})\cdot a=1,$$

即 Q 的每一非零元都有逆元，即 Q 是可除代数．

有趣的是，上面三个例子给出实数域上所有可能的有限可除结合代数，这就是著名的 Frobenius 定理(参看第三章 § 6)．

定义 1.2.1 称代数 A 为单代数，如果除其本身和 0 以外 A 没有别的理想，并且 $A^2\neq 0$．

由于 A^2 是 A 的理想，如果 A 没有真理想(即异于 A 本身和 0 的理想)，则必 $A^2=0$ 或 $A^2=A$．因而单代数的定义中要求 $A^2\neq 0$ 的这一条件，只是把一维零乘代数($A^2=0$ 的代数 A，称为零乘代数)这一简单情况排除在外．

易见可除代数是单代数．单代数不一定是可除代数可由下例看出．

例 4 设 F 是任意域，n 为任意正整数，令 F_n 为 F 上 $n\times n$ 矩阵的全体，则对通常的矩阵运算，F_n 是 F 上 n^2 维结合代数．令 e_{ij} 为第 i 行第 j 列交叉处为 1，其余位置全是 0 的矩阵，并将称之为矩阵单位，则 e_{ij}, $i, j=1,\cdots,n$ 组成 F_n 的一个基，其乘法表为

$$e_{ij}\cdot e_{lm}=\delta_{jl}e_{im},\ i, j, l, m=1\cdots, n,$$

其中 δ_{jl} 为 Kronecker 符号(即当 $j=l$ 时，$\delta_{jl}=1$，否则 $\delta_{jl}=0$)．

F_n 是一个单代数．欲证此，只需证 $0\neq a\in F_n$，则 a 所生成的理想 (a)(即包含 a 的所有理想之交)必等于 F_n．设 $a=\sum\alpha_{ij}e_{ij}$，$\alpha_{ij}\in F$．因为 $a\neq 0$，α_{ij} 中必有一，说是 $\alpha_{st}\neq 0$．用 F_n 的元素右乘或左乘 a，其结果当然仍属于理想 (a)，故

$$\alpha_{st}^{-1}(e_{ss}ae_{tt})=e_{st}\in(a),$$

$$e_{is}e_{st}e_{tj}=e_{ij}\in(a),\ \forall i, j.$$

即全部基元 e_{ij} 都在(a)中，故$(a)=F_n$，即证得 F_n 是单代数．

在第二章中我们将看到，F上有限结合单代数可通过F上可除代数以及 F_n 完全刻划之．

例 5 设A为域F上的n维空间．在A中引进零乘法，即规定A中任意两个元素的乘积都是零．这样A成为零乘代数，这样的代数当然是结合代数．

例 6 设F为任意域，n为任意正整数．设N为F上所有上三角 $n\times n$ 矩阵的集，即N为一切形如

$$a=\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵全体，矩阵a的主对角线以上的三角地带可添写F中任意元素而其余位置都添零．易见N是F上$1+2+\cdots+(n-1)=n(n-1)/2$维结合代数．直接计算可知，$N$中任意$n$个元素之积必为零，即有$a_1a_2\cdots a_n=0$，$\forall a_i\in N$，或$N^n=0$．我们称具有这样性质的代数为幂零代数．这样，代数$N$是幂零代数．

例 7 设F为任意域．G为任意有限群，其运算记作乘法，其元素记作$g_1,\cdots,g_n$．以G的元素为基元可得F上的一个n维向量空间$F[G]$，其元素具有形状$\sum a_ig_i, a_i\in F$．把$F[G]$的基元g_i间的乘法就规定为群G中的乘法，这样$F[G]$便成为F上的代数．由于群G的乘法有结合律，故$F[G]$是结合代数，称之为群代数．群代数对群的表示论有重要意义．

关于例子暂时就给出这一些．在这些例子中，可除代数和零乘代数是两种极端类型．单代数接近可除代数而较之宽，幂零代数靠近零乘代数而较之广．研究单代数与幂零代数这两类有鲜明特点的代数类，并利用它们去刻划任意有限结合代数，是今后讨论结合代数结构的主要途径之一．

下面我们给出两个简单的定理．

定义 1.2.2 说代数A的元素a是左零因子，如果$a\neq 0$，且

$\exists\, 0 \neq b \in A$，使 $ab=0$. 类似地可定义右零因子. 左、右零因子统称为零因子.

定理 1.2.1 若 F 上有限代数 A 没有零因子，则 A 必是可除代数.

证 任取 A 的一个基：$a_1, \cdots, a_n$. 若 $0 \neq a \in A$，则 $aa_1, \cdots, aa_n$ 在 F 上线性无关，因若有不全是零的 F 中元 α_i，使 $\sum_i \alpha_i(aa_i)=0$，因而

$$a \cdot \sum \alpha_i a_i = 0,$$

即 a 是左零因子，与假设矛盾. 这样 $aa_1, \cdots, aa_n$ 组成 A 的一个基，因而对任意 $b \in A$，必有

$$b = \beta_1(aa_1) + \cdots + \beta_n(aa_n) = a \cdot \sum \beta_i a_i,$$

故知 $ax=b$ 永远有解. 由于没有零因子，易见方程 $ax=b$ 的解还是唯一的. 同理可证方程 $xa=b$ 也有唯一解. 这样 $\{A\backslash 0, \cdot\}$ 是群，即 A 是可除代数. ▎[1)]

定理 1.2.2 设 A 是 F 上有单位元 1 的代数，K 是 A 的子代数，$1 \in K$，且 K 是 F 的扩域，则有

$$(A:K)\ (K:F) = (A:F),$$

其中 $(A:K)$ 表示 K 上向量空间 A 的维数，其他准此.

证 设 $a_1, \cdots, a_s$ 是 K 上向量空间 A 的一个基；$k_1, \cdots, k_t$ 是 F 上向量空间 K 的一个基. 今证 $k_i a_j$，$i=1, \cdots, t$，$j=1, \cdots, s$，是 F 上向量空间 A 的一个基. 首先证明它们在 F 上是线性无关的. 若有 $\alpha_{ij} \in F$ 使

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} k_i a_j = 0,$$

则有

$$\sum_j \Big(\sum_i \alpha_{ij} k_i\Big) a_j = 0.$$

---

1) 符号"▎"表示证明完毕.

由 a_j, $j=1,\cdots,s$, 在 K 上是无关的，故有

$$\sum_i a_{ij}k_i=0, \quad \forall j.$$

由 k_i, $i=1,\cdots,t$, 在 F 上是无关的，故有

$$a_{ij}=0, \quad \forall i, j,$$

即证得 $k_i a_j$ 在 F 上是无关的. 其次证明 $k_i a_j$ 是 F 上向量空间 A 的一组生成元. 对任意 $a\in A$, 有

$$a=\sum_j \beta_j a_j, \quad \beta_j\in K,$$

而

$$\beta_j=\sum_i a_{ij}k_i, \quad a_{ij}\in F.$$

所以

$$a=\sum_j\sum_i a_{ij}k_i a_j.$$

至此证得 $k_i a_j$, $i=1,\cdots,t$, $j=1,\cdots,s$, 是 A 在 F 上的一个基，这样 $(A:F)=st=(A:K)\cdot(K:F)$. |

§3 结合代数的表示

对于一个抽象给出的代数系统，我们总是希望用具体的代数系统去表示它. 任意一个群可用一个集的变换组成的群来表示它，也可用一些可逆矩阵的乘法群来表示它，任意一个环可用一个 Abel 群的自同态组成的环来表示它. 对比着环，用类似方法可把任意一个结合代数用向量空间的线性变换或矩阵组成的代数来表示. 首先我们给出

定义 1.3.1 设 A 是域 F 上的有限结合代数. φ 是 F 上代数 A 到 F 上全矩阵代数 F_n(n 是某个正整数)内的一个（代数的）同态对应. 我们称 φ 为代数 A 的一个表示，称 n 为表示的阶数.

两个表示 φ_1,φ_2 说是等价的，如果它们的阶数相同，并且存在一可逆矩阵 S, 使 $a\varphi_1=S(a\varphi_2)S^{-1}$, $\forall a\in A$.

易证，等价是表示之间的一个等价关系。

设 φ 是代数 A 的一个表示，$a\varphi=T(a)\in F_n, a\in A$。取 V 为 F 上一个向量空间，取 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 为 V 的一个基。这时 A 中元素 a 可通过表示 φ 以自然方式解释为空间 V 的一个线性变换，即规定

$$xa=\left[(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right]a$$

$$=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)T(a)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad x\in V,$$

注意到 φ 是代数 A 到代数 F_n 内的一个同态对应，直接验证可得

$$(x+y)a=xa+ya, \ (\alpha x)a=x(\alpha a)=\alpha(xa),$$

$$x(a+b)=xa+xb, \ x(ab)=(xa)b.$$

例如我们来验证一下等式 $x(ab)=(xa)b$，我们有

$$x(ab)=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)T(ab)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)T(a)T(b)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

$$(xa)b=\left[(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)T(a)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right]b$$

$$=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)T(a)T(b)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

故得该等式。

这样我们便该有下面的

定义1.3.2 设A是域F上有限结合代数，V是域F上有限维向量空间．如果还有一个运算$V\times A$[1]$\to V$，运算结果记作xa，$x\in V$，$a\in A$，称之为模运算，且它满足下列条件：

i) $(x+y)a=xa+ya$,

ii) $x(a+b)=xa+xb$,

iii) $x(ab)=(xa)b$,

iv) $(\alpha x)a=x(\alpha a)=\alpha(xa)$.

$\forall\alpha\in F$, $x, y\in V$, $a,b\in A$.

我们称V是代数A的表现空间或代数A的代数模（或右代数模，为了突出代数A的元素从右侧作用到V上）．

代数A的两个代数模V，V'，说是同构的，如果有V到V'上的一个一一对应θ：$x\to x'$，使

$$(x_1+x_2)'=x_1'+x_2',$$
$$(xa)'=x'a,$$
$$(\alpha x)'=\alpha x'.$$

相应地可定义代数模的同态，代数子模，商模等概念．

相应于定理1.1.1—1.1.3的定理对于代数模也是成立的．

代数A的代数模与环R上的模的区别就在于前者的定义中增加了第iv)等式这一要求．它们是很接近的概念，所起的作用也是类似的．

上面的讨论说明代数A的一个表示可规定代数A的一个代数模．互相等价的表示所对应的代数模也必是彼此同构的．这是因为，若φ_1,φ_2是代数A的两个互相等价的表示，即$a\varphi_1=S(a\varphi_2)S^{-1}$，$\forall a\in A$，其中$S$是$n$阶可逆矩阵，则表示$\varphi_i$所对应的代数模$V_i$之模运算的定义式为

$$\begin{pmatrix} v_{i1}\\ \vdots \\ v_{in}\end{pmatrix}a=(a\varphi_i)\begin{pmatrix} v_{i1}\\ \vdots \\ v_{in}\end{pmatrix},\quad i=1,2,$$

---

1) $V\times A$表示集V和集A的卡氏积．

其中 $v_{i1}, \cdots, v_{in}$ 是向量空间 V_i 的基，$i=1,2,n$ 为表示 φ_1, φ_2 相同的阶数，关系式

$$\begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix} \theta = S \begin{pmatrix} v_{21} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{pmatrix}$$

所确定的向量空间 V_1 到向量空间 V_2 的同构对应，不难验证也是代数模 V_1 到代数模 V_2 的同构对应. 即证得等价的表示对应的代数模是同构的.

反过来，给定代数 A 的一个代数模 V. 任取 V 的一个 F-基[1]：$v_1, \cdots, v_n$，则有，对任意 $a \in A$，

$$v_i a = \sum \alpha_{ij} v_j, \quad \alpha_{ij} \in F$$

或

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} a = T(a) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \text{ 其中 } T(a) = (\alpha_{ij}).$$

直接验证可知 $\varphi: a \mapsto T(a)$ 是代数 A 到 F_n 内的一个同态对应，即 φ 是代数 A 的一个表示. 取代数模 V 的不同 F-基，依上法将得到代数 A 的不同表示，但是注意在不同的基下同一个线性变换所对应的矩阵彼此相似而这个相似变换是由此二基之间的转换矩阵来实现的，可知这些表示都是彼此等价的.

这样讨论代数的表示与讨论代数的代数模就本质言就是完全一样的了. 形式上，表示是把代数的元素和矩阵联系起来，代数模则把它和向量空间的线性变换联系起来.

为了更进一步的说明这一点，我们在这里再讨论两个概念.

定义 1.3.3 说代数 A 的一个表示 ψ 是可约的，如果存在与 ψ 等价的一个表示 φ，有性质

$$a\varphi = T(a) = \begin{bmatrix} T_1(a) & S(a) \\ 0 & T_2(a) \end{bmatrix}, \quad \forall a \in A,$$

1) V 的 F-基指域 F 上向量空间 V 的一个基.

其中 $T_i(a)$ 是 $n_i\times n_i$ 矩阵，$T_i(a)$ 中有非零矩阵，$n_i>0, i=1,2$，而 0 表 $n_2\times n_1$ 零矩阵，否则就说表示 ψ 是不可约的或既约的。

定义 1.3.4 说代数 A 的一个代数模 V 是既约的，如果 $VA\neq 0$ 且 V 没有异于本身和零的代数子模，否则就说 V 是可约的. 非零的既约代数模叫做单代数模.

这时我们有下面的结果.

定理 1.3.1 代数 A 的表示 φ 是既约的当且仅当 φ 所对应的代数模是既约的.

此定理的证明留给读者，它的证明也可由下面的讨论得到.

我们考察 F 上代数 A 的一个可约表示 φ，不妨认定

$$a\varphi=T(a)=\begin{pmatrix}T_1(a) & S(a)\\ 0 & T_2(a)\end{pmatrix},\quad \forall a\in A, \tag{1}$$

其中 $T_i(a)$ 是 $n_i\times n_i$ 矩阵而 $n_i>0, i=1,2, n=n_1+n_2$ 是表示 φ 的阶数. 直接验证可知 $\varphi_1: a\to T_1(a), \varphi_2: a\to T_2(a)$ 是代数 A 的两个阶数较 n 为低的表示，即可约表示可导出阶数较低的一些表示.

为了用代数模的语言来说明上述现象，我们作可约表示 φ 相应的代数模 V：V 是以 $v_1, \cdots, v_n$ 为 F-基的向量空间而模运算规定为

$$\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}a=T(a)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}.$$

注意到 $T(a)$ 的形状(1)，我们看到由 $v_{n_1+1}, \cdots, v_n$ 生成的 n_2 维子空间 V_2 恰是 V 的代数子模，这是因为

$$\begin{pmatrix}v_{n_1+1}\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}a=[\,0\quad T_2(a)\,]\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}=T_2(a)\begin{pmatrix}v_{n_1+1}\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}.$$

易见 V_2 就是与上面的表示 φ_2 相对应的代数模.

另一方面，利用代数模 V 的一个代数子模 V_2，按下面方法可得一个代数模：取向量空间 V 关于子空间 V_2 的商空间 $\bar{V}=V/V_2$，

其元素为 $\bar{v}=v+V_2$. 规定模运算为

$$\bar{v}a=\overline{va},\ \forall \bar{v}\in\bar{V}, a\in A.$$

由于V_2是代数子模，上面运算的定义与代表无关. 直接验证可知$\bar{V}$对此模运算作成一个代数模，称之为代数模V关于代数子模V_2的**代数商模**，仍记作 V/V_2. 采用代数商模 V/V_2 的F-基：$\bar{v}_1,\cdots,\bar{v}_{n_1}$，则

$$\begin{pmatrix}\bar{v}_1\\ \vdots\\ \bar{v}_{n_1}\end{pmatrix}a=\begin{pmatrix}\overline{v_1a}\\ \vdots\\ \overline{v_{n_1}a}\end{pmatrix}=T_1(a)\begin{pmatrix}\bar{v}_1\\ \vdots\\ \bar{v}_{n_1}\end{pmatrix},$$

即商模V/V_2就是与表示 φ_1 相应的代数模.

总之，若可约表示 φ 相应的代数模是 V，则可约表示 φ 所导出的表示 φ_2, φ_1 顺序相应于 V 的代数子模 V_2 与 V 的代数商模 V/V_2.

定义 1.3.5 F上代数A的一个表示 φ 叫作忠实的，如果 φ 是一个一一对应，即如果 φ 是F上代数 A 到全矩阵代数 F_n 内的同构嵌入.

定义 1.3.6 代数A的代数模 V 称作是忠实的，如果对任意 $a\in A$, 由 $Va=0$ 必有 $a=0$.

易见，忠实代数模所决定的表示是忠实的而忠实表示所对应的代数模是忠实的.

关于代数的表示的一般概念暂时介绍到此. 下面我们来说明任意一个F上有限结合代数都有忠实表示.

代数A本身可以很自然地解释成为代数A的代数模：A是F上向量空间，而模运算就采用代数A的乘法 xa（由于我们定义的代数模都是右模，故在 xa 中，左侧的元素 x 应看作是代数模A中的元素而右侧的元素 a 应看作是代数A的元素）. 直接验证可知这样确实得到一个代数模A. 我们称之为代数A的**正则代数模**，它所决定的表示（在等价的意义下是唯一的）称为代数A的**正则表示**.

首先设A是有单位元 1 的代数. 此时代数A的正则代数模是

忠实的，这是因为，若 $Aa=0$，必有 $1\cdot a=0$ 即 $a=0$。这样 A 的正则表示即是 A 的忠实表示，亦即有单位元的 n 维代数 A 可看作是 F_n 的一个子代数。

其次设 A 是 F 上 n 维代数，没有单位元。此时可先将代数 A 同构嵌入有单位元的 $n+1$ 维结合代数中去。为此考虑由形式元素对组成的集合

$$A'=\{(a,\alpha)\mid a\in A,\alpha\in F\}.$$

利用 A 中的运算，可如下定义 A' 中的运算：

$$(a,\alpha)+(b,\beta)=(a+b,\alpha+\beta),$$

$$r(a,\alpha)=(ra,r\alpha),$$

$$(a,\alpha)\cdot(b,\beta)=(ab+\alpha b+\beta a,\alpha\beta).$$

直接验证可知 A' 是 F 上结合代数，其维数为 $n+1$，且 $(0,1)$ 是 A' 的单位元。对应 $a\to(a,0)$ 是代数 A 到代数 A' 内的同构嵌入。如果将 a 和 $(a,0)$ 等同起来可认为 A 是 A' 的子代数。由上面的讨论 A' 可看作 F_{n+1} 的子代数，这样 A 也就可以看作 F_{n+1} 的子代数了。这也就是说，代数 A 有一个忠实表示，其阶数为 $n+1$。

总之，一切有限结合代数都可看作是全矩阵代数的子代数，这一点有时对我们是有帮助的。这和一个群可以看作对称群的子群，一个环可以看作一个 Abel 群的自同态环的子环是完全平行的。然而全矩阵代数的子代数是很复杂的，因而这个结果对我们的帮助是很有限的。

最后，证明两个定理。

设 A 是有单位元的 F 上代数。我们可以用下面的方式来讨论 A 的正则表示。设 $a\in A$，则元素 a 可确定向量空间 A 的两个线性变换：

$$\begin{aligned} R_a:&\quad x\mapsto xa,\\ L_a:&\quad x\mapsto ax,\end{aligned}\qquad x\in A.$$

由于 A 有单位元 1 而 $1\,R_a=a$，$1\,L_a=a$，故当 $a\neq b$ 时 $R_a\neq R_b$，$L_a\neq L_b$。用 $A_R(A_L)$ 表示一切 $R_a(L_a)$，$a\in A$，的集合，则对线性变换的运算言，它们都作成 F 上代数。此时，对应 $\varphi: a\mapsto R_a$ 是代数

A 到代数 A_R 上的同构对应， 而对应 $\psi: a\mapsto L_a$ 是代数 A 到代数 A_L 上的反同构对应，即 ψ 是一一对应且有性质： i) $(a+b)\psi=a\psi+b\psi$, ii) $(\alpha a)\psi=\alpha(a\psi)$, iii) $(ab)\psi=(b\psi)(a\psi)$, 这是因为 $xL_{ab}=(ab)x=a(bx)=a(xL_b)=(xL_b)L_a=xL_bL_a$.

φ 实际上就是 A 的正则表示而 ψ 则可称之为代数 A 的**反表示**(即在表示的定义中用上面的 iii) 代替保持乘法运算的要求). 如果代数(右)模是相应于代数的表示,则读者不难去定义代数左模以相应于代数的反表示.

将上面结果写成定理形式便是

定理 1.3.2 设 A 是有单位元的代数,则代数 A 同构于代数 A_R, 而反同构于代数 A_L.

作为正则表示的一个简单应用,我们给出

定理 1.3.3 设 A 是有单位元 1 的有限代数,若 $ab=1$, 则必 $ba=1$, 因而 a, b 互为逆元.

证 不妨把 A 看作 F_n 的子代数,而 1 是单位矩阵, a, b 是 F 上的矩阵. 这样, a 的行列式不为 0, 因而是可逆矩阵, 由逆矩阵的唯一性得 $ba=1$. ▌

§ 4 直　　和

在 § 2 中利用乘法表可以构造一些有限结合代数. 利用已知的一些代数通过一定的方法去构造新的代数, 是一种更重要的获得新代数的途径. 在本节和下一节中我们介绍这类方法中最常用的两个. 本节介绍作直和的方法. 代数的直和与群的直积是相平行的概念.

设 A_1, A_2 是域 F 上两个有限结合代数. 考虑下面的集合

$$A=\{(a_1,a_2)\mid a_1\in A_1, a_2\in A_2\},$$

规定 $(a_1,a_2)=(b_1,b_2)$ 当且仅当 $a_1=b_1, a_2=b_2$. 利用代数 A_1, A_2 的运算,照下面方法来引入 A 的运算:

$$\alpha(a_1,a_2)=(\alpha a_1,\alpha a_2), \alpha\in F,$$

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2), \tag{1}$$
$$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)=(a_1b_1,a_2b_2),$$
在上面定义中我们看到，如果把 A 中的元素 (a_1, a_2) 看作向量的话，那末 A 中的运算被定义为按分量去进行运算。当然第一分量要按 A_1 中的运算去进行而对第二分量要按 A_2 的去作。这样容易验证，当 A_1,A_2 是结合代数时，A 也是；若 $u_i, i=1,\cdots,n$, $v_j, j=1,\cdots,m$ 顺序为 A_1,A_2 的 F-基时，$(u_i, 0)$；$i=1,\cdots,n$，$(0, v_j)$，$j=1,\cdots,m$ 合在一起组成 A 的 F-基，因而代数 A 的维数恰为代数 A_1,A_2 的维数之和。

这样，由已知代数 A_1，A_2 出发，依上法可得一新的代数 A，称之为代数 A_1,A_2 的**直和**。

为了更进一步看清直和 A 和 A_1,A_2 之间的联系，我们考虑 A 中的两个子集
$$A_1'=\{(a,0)\mid a\in A_1\},A_2'=\{(0,b)\mid b\in A_2\}.$$
由(1)易见 A_1',A_2' 是代数 A 的理想。另一方面，令
$$\varphi_1:a\to(a,\ 0),\ \ a\in A_1,$$
$$\varphi_2:b\to(0,\ b),\ \ b\in A_2,$$
易见 φ_i 是 A_i 到 A'_i 上的同构对应，$i=1,2$。如果我们把 a 和 $(a,0)$ 等同起来，b 和 $(0,b)$ 等同起来，因而 A_i' 和 $A_i, i=1,2$ 等同起来，这样 A,A_1,A_2 之间的关系就是 i) A_1,A_2 是 A 的理想，ii) $A_1\cap A_2=\{0\}$，iii) $A=A_1+A_2$，即向量空间 A 是其子空间 A_1,A_2 之和。

上面这个讨论，使我们得到直和这一概念的另一种说法，即若代数 A 包含有两个理想 A_1,A_2，它们之间有上述 i)，ii)，iii) 三个条件，此时就说 A 是其理想 A_1，A_2 的**直和**。为了区别起见，有时将它称为**内直和**而前面由已知代数 A_1，A_2 出发硬造出的代数 A 为 A_1，A_2 的**外直和**。

外直和、内直和都可推广到有限个代数 A_i 的情况，这就是

定义 1.4.1(外直和)　设 $A_i, i=1,\cdots,n$ 为 F 上有限结合代数。令 $A=\{(a_1,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i, i=1,\cdots,n\}$。规定 $(a_1,\cdots a_n)=(b_1,\cdots,b_n)$ 当且仅当 $a_i=b_i$，$i=1,\cdots,n$。定义运算如下：

$$\alpha(a_1,\cdots,a_n)=(\alpha a_1,\cdots\alpha a_n),\alpha\in F,$$
$$(a_1,\cdots,a_n)+(b_1,\cdots b_n)=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n),$$
$$(a_1,\cdots,a_n)\cdot(b_1,\cdots b_n)=(a_1b_1,\cdots,a_n b_n),$$
则A成为F上的有限结合代数,其维数

$$(A:F)=\sum_{i=1}^{n}(A_i:F).$$

称代数A为A_i, $i=1,\cdots,n$,的外直和.

定义 1.4.2(内直和) 设A是一个有限结合代数,A_i, $i=1,\cdots,n$,是A的子代数。若

i) A_i是代数A的理想,$i=1,\cdots,n$,

ii) $A=\sum_{i=1}^{n}A_i$(子空间A_i, $i=1,\cdots,n$, 的和),

iii) $A_i\cap\sum_{j\neq i}A_j=\{0\}$, $\forall i$

(ii),iii)说明向量空间A是子空间A_i,$i=1,\cdots,n$, 的直和),则称A为其子代数A_i,$i=1,\cdots,n$, 的内直和.

无论A是哪一种直和,都把A记作$A=\sum_i\oplus A_i=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n$. 这不会引起混乱,因为如上述那样作适当的解释,这两个直和的意义是可以统一起来的. 也就是说它们之间是同构的。

定义 1.4.3 设代数A有一子代数A_1。若存在一子代数A_2使$A=A_1\oplus A_2$, 则称A_1为A的直和项.

易见A的直和项必是A的理想,但A的理想不一定是A的直和项. §3末谈到了把任意一个代数A同构嵌入到有单位元的代数A'中,易见A是A'的理想,但不是A'的直和项.

下面的定理讨论直和的初步性质.

定理 1.4.1 F上有限结合代数A中有n个理想A_i, $i=1,\cdots,n$, 则下面诸条件是等价的:

1) $A=\sum_{i=1}^{n}\oplus A_i$，

2) $A=\sum_{i=1}^{n}A_i$，且 $(A:F)=\sum_{i=1}^{n}(A_i:F)$，

3) A的元素可唯一地表成A_i中元素的和，即若$a\in A$必有 $a=\sum_{i=1}^{n}a_i, a_i\in A_i$ 且若还有 $a=\sum a_i', a_i'\in A_i$，则必有 $a_i=a_i', i=1,\cdots,n$，

4) 存在向量空间 A 到子空间 A_i 上的同态对应 φ_i，满足 $\varphi_i\varphi_j=\delta_{ij}\varphi_j$，$\delta_{ij}$ 是 Kronecker 符号，且 $\sum_i\varphi_i=1$，其中 1 指 A 的恒等自同构。

证　由于 A_i 都是理想，故 1) 成立当且仅当向量空间 A 是子空间 A_i 的直和，而 2)，3)，4) 刚好是保证这一点的必要且充分条件。 ▎

定理 1.4.2　设 A_1 是代数 A 的直和项，则代数 A_1 的理想 B 也是 A 的理想。

证　因为 A_1 是直和项，故有 $A=A_1\oplus A_2$。由 $A_1A_2\subseteq A_1\cap A_2=\{0\}$，$A_2A_1\subseteq A_1\cap A_2=\{0\}$，故 $A_1A_2=A_2A_1=\{0\}$。因而有 $BA\subseteq BA_1\subseteq B$。同理 $AB\subseteq A_1B\subseteq B$，故知 B 是代数 A 的理想。 ▎

作为上两个定理的推论，我们有

定理 1.4.3　(1) 若 $A=\sum_{i=1}^{n}\oplus A_i$ 而 π 是 $1,\cdots,n$ 的一个置换，则有 $A=\sum_{i=1}^{n}\oplus A_{\pi(i)}$。

(2) 若 $A=\sum_{i=1}^{n}\oplus A_i$ 而 $A_i=\sum_{j=1}^{j_i}\oplus A_{ij}$，则

$$A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{j_i}\oplus A_{ij}. \quad ▎$$

现在我们来看一些例子：

例 1 零乘代数 A_1, A_2 的直和 $A=A_1\oplus A_2$ 仍为零乘代数.

例 2 幂零代数 A_1, A_2 的直和 $A=A_1\oplus A_2$ 仍为幂零代数. A 的幂零指数等于 A_1, A_2 的幂零指数中的最大者.

例 3 单代数 $A_i, i=1,\cdots,n$, 的直和 $A=\sum\oplus A_i$. 代数 A 已不是单代数了,因为 A_i 或者它们中若干个的和都是 A 的理想. 我们还知道 A 的每一个理想都是某些 A_i 的直和, 这样 A 共有 2^n 个不同的理想.

为了说明这一点, 设 $0\neq B$ 是 A 的理想. 考虑足码集 $I=\{i\mid\exists b\in B,\ b=\sum_i a_i$, 其中 $a_i\neq 0\}$. 对任意 $i\in I$, 有 $b\in B$ 而 $b=\sum_i a_i, a_i\neq 0$, 注意到 $A_iA_j=\delta_{ij}A_j$, δ_{ij} 是 Kronecker 符号而单代数 A_i 内没有绝对零因子(即从右侧或左侧零化整个代数的非零元素), 可得 $B\supseteq bA_i=\left(\sum a_j\right)A_i=a_iA_i\neq 0$, 因而 $B\cap A_i\neq 0$. 但 $B\cap A_i$ 是 A_i 的理想, 由 A_i 的单性得 $B\cap A_i=A_i$, 即得对任意 $i\in I$, 有 $A_i\subseteq B$, 因而 $\sum_{i\in I}A_i\subseteq B$. 另一方面显然有 $B\subseteq\sum_{i\in I}A_i$, 故得 $B=\sum_{i\in I}A_i$, 即证得 A 的每一理想都是某些 A_i 之和.

取 I' 为 I 在集 $\{1,\cdots,n\}$ 中的补集, 则显然有

$$A=\left(\sum_{i\in I}A_i\right)\oplus\left(\sum_{i\in I'}A_i\right),$$

即知 A 的任意一个理想都是 A 的直和项. 这样我们顺便还证明下面定理的一半, 定理的另一半留作练习.

定理 1.4.4 设 A 是有限结合代数. A 是单代数的直和当且仅当 A 没有绝对零因子($Aa=0$ 或 $aA=0$ 仅当 $a=0$ 时成立)且 A 的任一个理想都是直和项. ∎

例 3 中的代数类是和单代数很接近的代数类. 这是一个重要的代数类. 为此引入

定义 1.4.4 称有限个有限单代数的直和为半单代数, 此外, 为了方便我们约定单代数也是半单代数.

在本节最后, 我们想指出对其他常见的代数系统[例如环、模、

非结合代数，拟环(near ring)等]也都有直和的概念．作为例子，也由于以后要用，在这里我们给出F上代数A的左代数模(简记作左A-模)的直和定义．

定义 1.4.5(内直和) 左A-模U说是其A-子模M_1, M_2的内直和，如果

i) $U=M_1+M_2$,

ii) $M_1\cap M_2=\{0\}$.

这也就是说，把U看作F上向量空间时，是M_1, M_2(看作是子空间)的直和．

定义 1.4.5′(外直和) M_1, M_2是两个左A-模，则

$$U=\{(m_1,m_2), m_1\in M_1, m_2\in M_2\}$$

关于下面规定的运算是一个左A-模：

i) $(m_1,m_2)=(m_1',m_2')\Longleftrightarrow m_1=m_1', m_2=m_2'$,

ii) $(m_1,m_2)+(n_1,n_2)=(m_1+n_1, m_2+n_2)$,

iii) $\alpha(m_1,m_2)=(\alpha m_1,\alpha m_2), \alpha\in F$,

iv) $a(m_1,m_2)=(am_1,am_2), a\in A$,

称之为左A-模M_1, M_2的外直和．

与代数的情形完全类似地可得，外直和是可解释成为内直和的，因而它们是可以统一起来的．故两种情况都称作直和并记作$M_1\oplus M_2$.

定义 1.4.6 说左A-模U的A-子模M是U的直和项，如果存在A-子模N使$U=M\oplus N$.

定义 1.4.7 说非零左A-模U是弱单A-模，如果U除本身和$\{0\}$外没有其他的A-子模．若弱单A-模U还满足$AU\neq 0$，则称之为既约A-模或单A-模．

类似地我们可以证明与上面定理 1.4.4 完全平行的

定理 1.4.5 设U是A-模且知U是F上有限空间．U是弱单A-模的直和当且仅当U的任一个A-子模都是直和项．▌

这里顺便提一下，定理 1.4.4 和定理1.4.5中“有限”的条件是可以去掉的，当然相应地应引入无限多个代数或模的直和的概念．

§ 5 张量积(或 Kronecker 积)

在上一节中，我们讨论了直和——即把一个代数分解成两个代数的有特殊性质的和. 在这一节中，我们利用乘法考虑类似的构造方法，即把一个代数分解成两个代数的积. 在代数 A 中加法和乘法是不匀称的，例如，加法是可换的且永远有恒等元，而乘法则是不可换的且不一定有单位元，因而讨论起“乘积”来自然有些麻烦.

和直和类似，也有内、外定义的问题，这次我们从内定义开始.

设 A 是域 F 上的代数，B, C 是它的子代数并且知道 $bc=cb$, $\forall b\in B, \forall c\in C$, 此时易见

$$BC=\left\{\sum b_i c_i(\text{有限和})\,|\,b_i\in B, c_i\in C\right\}$$

是 A 的一个子代数，称之为子代数 B, C 之积. 我们有兴趣的是下面这个有特殊性质的积的概念.

定义 1.5.1(内张量积的定义) 设 A 是域 F 上代数，A', B, C 是 A 的子代数，若

i) $bc=cb$, $\forall b\in B$, $\forall c\in C$,

ii) $A'=BC$,

iii) $(A':F)=(B:F)\cdot(C:F)$，其中 $(A':F)$ 表 F 上代数 A' 的维数，就说 F 上代数 A' 是代数 B, C 的内张量积（或直积或 Kronecker 积)，记作 $A'=B\otimes C$. 特别当 $A=A'$ 时，我们说代数 A 分解为其子代数 B, C 的内张量积.

注意，iii) 中涉及域 F，这样张量积的概念是和基础域 F 密切相关的. 这一点虽然表面上看和直和是相同的，但在应用中，张量积有时在不同的基础域上进行而对直和则很少这样作.

由张量积的内定义，不难根据子代数 B, C 的乘法得到代数 $B\otimes C$ 的乘法表. 设 B, C 的 F-基顺序为 $b_1, \cdots, b_s; c_1, \cdots, c_t$，而乘法表为：

$$b_i b_j = \sum_n \beta_{ij}^n b_n, \tag{1}$$

$$c_h c_k = \sum_m \gamma_{hk}^m c_m, \tag{2}$$

则 $b_i c_h, i=1,\cdots,s, h=1,\cdots,t$ 是 $B\otimes C$ 的 F-基，而它关于此基的乘法表为：

$$(b_i c_h)(b_j c_k) = \sum_{n,m} \beta_{ij}^n \gamma_{hk}^m (b_n c_m). \tag{3}$$

这样，上面关于张量积的内定义就启示我们，从两个给定的 F 上代数 B、C 出发，如何构造出新的代数来，即导出张量积的外定义。

定义 1.5.2 设给定 F 上结合代数 B, C. $b_1,\cdots,b_s$ 是 B 的 F-基而(1)是相应于此基的乘法表，$c_1,\cdots,c_t$ 是 C 的 F-基而(2)是相应的乘法表．以符号 $b_i c_h$(看作不可分割的整体)，$i=1,\cdots s$，$h=1,\cdots,t$，为基作一个 F 上向量空间 A，取(3)作乘法表，则 A 成为 st 维的 F 上代数，叫作代数 B,C 的外张量积.

B, C 是结合代数，易知 A 的基元素的乘法(3)满足结合律，从而 A 是结合代数．事实上，

$$[(b_i c_h)(b_j c_k)](b_p c_q) = \sum_{n,m} \beta_{ij}^n \gamma_{hk}^m (b_n c_m)(b_p c_q)$$

$$= \sum_{n,m} \beta_{ij}^n \gamma_{hk}^m \left(\sum_{s,t} \beta_{np}^s \gamma_{mq}^t b_s c_t \right) = \sum_{n,m,s,t} \beta_{ij}^n \beta_{np}^s \gamma_{hk}^m \gamma_{mq}^t (b_s c_t),$$

$$(b_i c_h)[(b_j c_k)(b_p c_q)] = \sum_{n,m} \beta_{jp}^n \gamma_{kq}^m (b_i c_h)(b_n c_m)$$

$$= \sum_{n,m} \beta_{jp}^n \gamma_{kq}^m \left(\sum_{s,t} \beta_{in}^s \gamma_{hm}^t b_s c_t \right) = \sum_{n,m,s,t} \beta_{jp}^n \beta_{in}^s \gamma_{kq}^m \gamma_{hm}^t (b_s c_t).$$

但
$$(b_i b_j) b_p = \sum_n \beta_{ij}^n b_n b_p = \sum_{n,s} \beta_{ij}^n \beta_{np}^s b_s,$$

$$b_i (b_j b_p) = \sum_n \beta_{jp}^n b_i b_n = \sum_{n,s} \beta_{jp}^n \beta_{in}^s b_s.$$

而
$$(b_i b_j) b_p = b_i (b_j b_p),$$

所以 $$\sum_n \beta_{ij}^n \beta_{np}^s = \sum_n \beta_{jp}^n \beta_{in}^s,\ \forall s.$$

同理 $$\sum_m \gamma_{hk}^m \gamma_{mq}^t = \sum_m \gamma_{kq}^m \gamma_{hm}^t,\ \forall t,$$

故有 $$\sum_{n,m} \beta_{ij}^n \beta_{np}^s \gamma_{hk}^m \gamma_{mq}^t = \sum_{n,m} \beta_{jp}^n \beta_{in}^s \gamma_{kq}^m \gamma_{hm}^t,\quad \forall s,\ t.$$

在定义 B,C 的外张量积时，我们选用了 B,C 的基，自然发生问题：B,C 的外张量积和 B,C 的基的选择有关吗？我们有下面的定理，它说明外张量积的定义是合理的。

定理 1.5.1 代数 B,C 的外张量积由 B,C 唯一确定，与基底选择无关。

证 设 $b_1,\cdots,b_s$ 与 $b_1',\cdots b_s'$ 是 B 的两组基，X 是其过渡矩阵，则

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_s \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix},\quad X=(x_{ij}).$$

反之

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = X^{-1} \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_s \end{pmatrix},\quad X^{-1}=(x'_{ij}),$$

其中 $$\sum_k x_{ik}x'_{kj} = \begin{cases} 0, & i\neq j, \\ 1, & i=j. \end{cases}$$

两组基的乘法表分别是：

$$b_ib_j = \sum_n \beta_{ij}^n b_n,$$

$$b'_ib'_j = \Big(\sum_l x_{il}b_l\Big)\Big(\sum_f x_{jf}\, b_f\Big) = \sum_{l,f} x_{il}\, x_{jf}\, b_l b_f$$

$$= \sum_{l,f,n} x_{il}x_{jf}\, \beta_{lf}^n b_n = \sum_u \Big(\sum_{l,f,n} x_{il}x_{jf}\beta_{lf}^n x'_{nu}\Big) b'_u.$$

同理设 $c_1, \cdots, c_t, c_1', \cdots, c_t'$ 是C的两组基，$Y=(y_{hk})$ 是过渡矩阵，而 $Y^{-1}=(y'_{hk})$，乘法表为：

$$c_h c_k = \sum_m \gamma_{hk}^m c_m,$$

$$c_h' c_k' = \sum_v \left(\sum_{p,q,m} y_{hp} y_{kq} \gamma_{pq}^m y'_{mv} \right) c_v'.$$

以 $b_i c_h$ 为基如定义 1.5.1 所述做代数 B，C 的外张量积 A，以 $b_i' c_h'$ 为基作成 A'，乘法表分别是：

$$(b_i c_h)(b_j c_k) = \sum_{n,m} \beta_{ij}^n \gamma_{hk}^m (b_n c_m),$$

$$(b_i' c_h')(b_j' c_k') = \sum_{l,f,n,u,p,q,m,v} x_{il} x_{jf} \beta_{lf}^n x'_{nu} y_{hp} y_{kq} \gamma_{pq}^m y'_{mv} (b_u' c_v').$$

令 φ： $b_i' c_h' \mapsto \sum_{l,p} x_{il} y_{hp} b_l c_p$，并线性扩充至全空间，即得$\varphi: A' \to A$，

$$\sum_{i,h} \alpha_{ih} (b_i' c_h') \mapsto \sum_{i,h} \alpha_{ih} \varphi(b_i' c_h').$$

我们来证明 A' 与 A同构。由定义可知，φ 保持加法和数量乘法，欲证保持乘法，只要证明保持基元之间的乘法即可。

$$(b_i' c_h')(b_j' c_k') \mapsto \sum x_{il} x_{jf} \beta_{lf}^n x'_{nu} x_{ur} y_{hp} y_{kq} \gamma_{pq}^m y'_{mv} y_{vw} (b_r c_w)$$

$$= \sum_{l,f,n,p,q,m} x_{il} x_{jf} \beta_{lf}^n y_{np} y_{hq} \gamma_{pq}^m (b_n c_m),$$

$$b_i' c_h' \mapsto \sum_{l,p} x_{il} y_{hp} (b_l c_p), \quad b_j' c_k' \mapsto \sum_{f,q} x_{jf} y_{kq} (b_f c_q),$$

其象相乘得

$$\sum_{l,p,f,q} x_{il} y_{hp} x_{jf} y_{kq} (b_l c_p)(b_f c_q)$$

$$= \sum_{l,p,f,q,n,m} x_{il} y_{hp} x_{jf} y_{kq} \beta_{lf}^n \gamma_{pq}^m (b_n c_m)$$

所以

$$\varphi[(b'_i c'_h)(b'_j c'_k)]=\varphi(b'_i c'_h)\varphi(b'_j c'_k).$$

最后，令 ψ ： $b_i c_h \mapsto \sum_{l,p} x'_{il} y'_{hp} b'_l c'_p$， 经验证知：

$\varphi\psi=1_A$ （A 的恒等自同构），

$\psi\varphi=1_{A'}$ （A'的恒等自同构），

故知 φ 是 A' 到 A 上的同构对应； 即得代数 B,C 的外张量积在同构的意义下唯一确定. 定理证毕. ▎

设代数 A 有子代数 B,C，且知 $BC=B\otimes_{内}C$ 是内张量积. 另一方面，取代数 $B_1\simeq B$， $C_1\simeq C$，并作代数 B_1， C_1 的外张量积 $B_1\otimes_{外}C_1$. 若取定代数B_1的一组基：$b_1,b_2,\cdots,b_n$以及它到 B 上的一个同构对应 φ，代数 C_1 的一组基：$c_1 c_2,\cdots,c_m$ 以及它到 C 上的一个同构对应 ψ，则易见 $b_i c_j \mapsto \varphi(b_i)\psi(c_j)$ 所确定的 F 上向量空间 $B_1\otimes_{外}C_1$ 到 F 上向量空间 $B\otimes_{内}C$ 上的同构对应，也是 F 上代数 $B_1\otimes_{外}C_1$ 到代数 $B\otimes_{内}C$ 上的同构对应. 这就是说，任意两个代数的外张量积与这两个代数(作为某个代数的子代数)的内张量积是彼此同构的. 由于外张量积依上定理是唯一确定的，故由此也知内张量积是和它们所在代数无关的. 这样两种定义的张量积就统一起来了，都用符号 $B\otimes C$ 表示，有时为了突出是在域 F 上做的张量积而记作 $B\otimes_F C$.

下面我们看一下张量积的简单性质.

定理 1.5.2 i) $B\otimes C=C\otimes B$，

ii) $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$.

证 i) 是显然的. 为了证明 ii)，可分别取代数 A，B，C 的 F-基 $a_i;b_j;c_k$. 这样 $(A\otimes B)\otimes C$ 是以 $a_i b_j c_k$ 为基的代数. 同样 $A\otimes(B\otimes C)$ 也是以 $a_i b_j c_k$ 为基的代数. 在同一代数中有相同基的两个子代数当然是相等的. ▎

定理 1.5.3 F 上代数 A 有子代数 B,C，B 的元素与 C 的元素乘法可换且 $A=BC$. 设 $b_1,\cdots,b_s$ 是 B 的 F-基，则 $A=B\otimes C$ 当且仅当由 $\sum_i b_i x_i=0, x_i\in C$ 必有 $x_i=0,\forall i$.

证　取代数C的一个F-基：$c_1,\cdots,c_t$，则$x_i=\sum_h \alpha_{ih}c_h$，$\alpha_{ih}\in F$。

若已知$A=B\otimes C$，则b_ic_j组成A的一个F-基，由

$$0=\sum_i b_ix_i=\sum_i b_i\sum_h \alpha_{ih}c_h=\sum_{i,h}\alpha_{ih}b_ic_h$$

得$\alpha_{ih}=0,\forall i,\forall h$，因而$x_i=0,\forall i$。

反之，若已知由$\sum b_ix_i=0$可推得$x_i=0$，今证必有$(A:F)=(B:F)\cdot(C:F)$。为此只需证st个元素b_ic_h是F-无关的。设$\sum\alpha_{ih}b_ic_h=0$，则有

$$0=\sum_i b_i\sum_h \alpha_{ih}c_h=\sum_i b_ix_i.$$

因而$x_i=0$，$\forall i$，因而$\alpha_{ih}=0$，$\forall i$，$\forall h$。这样由$(A:F)=(B:F)\cdot(C:F)$以及定理假设便得$A=B\otimes C$。▎

下面看一个张量积的例子，把它写成

定理 1.5.4　$F_n\otimes F_m=F_{n\cdot m}$。

证　设$e_{ij},i,j=1,\cdots,n$；f_{hk}，$h,k=1,\cdots,m$，分别为F_n，F_m的由矩阵单位组成的F-基，则符号$e_{ij}f_{hk}$将组成(外)张量积$F_n\otimes F_m$的一个F-基，其乘法表为

$$(e_{ij}f_{hk})(e_{pq}f_{st})=\delta_{jp}\delta_{ks}(e_{iq}f_{ht}),$$

其中δ_{jp},δ_{ks}为Kronecker符号。若令

$$e_{ij}f_{hk}=u_{i+(h-1)n,\,j+(k-1)n},\tag{4}$$

依上乘法表直接验算可得$u_{pq},p,q=1,\cdots,n\cdot m$，是一组矩阵单位。因而$F_n\otimes F_m=F_{n\cdot m}$。▎

更具体地看一下$F_2\otimes F_3=F_6$。F_2，F_3都有单位元，故其张量积F_6该含有子代数与它们同构。依(4)可知，对应

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & A\end{pmatrix}，\text{其中 }0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

给出F_2到F_6的同构嵌入，而对应

$$B=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23}\\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33}\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\beta_{11}I & \beta_{12}I & \beta_{13}I\\ \beta_{21}I & \beta_{22}I & \beta_{23}I\\ \beta_{31}I & \beta_{32}I & \beta_{33}I\end{pmatrix},\ 其中\ I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

给出 F_3 到 F_6 的同构嵌入．若把与 AB 相应的元素记成 $A\otimes B$，则

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}\beta_{11}A & \beta_{12}A & \beta_{13}A\\ \beta_{21}A & \beta_{22}A & \beta_{23}A\\ \beta_{31}A & \beta_{32}A & \beta_{33}A\end{pmatrix}.$$

这就是矩阵论中矩阵的张量积．

我们再看一个例子，仍把它写成

定理 1.5.5 F 上可除代数 D 与 F 上全矩阵代数 F_n 之张量积是单代数．

证 设 $A=F_n\otimes D$．由定理 1.5.3，A 中元素 a 可唯一地写成

$$a=\sum_{i,j}e_{ij}d_{ij},$$

其中 $d_{ij}\in D$ 而 e_{ij} 是矩阵单位，组成 F_n 的基．

若 $a'=\sum\limits_{h,k}e_{hk}d'_{hk}$，注意到 F_n 的元素和 D 的元素乘法可换，则有

$$aa'=\sum_{i,j,h,k}e_{ij}d_{ij}e_{hk}d'_{hk}=\sum_{i,j,h,k}e_{ij}e_{hk}d_{ij}d'_{hk}$$
$$=\sum_{i,k}e_{ik}\cdot\sum_{h}d_{ih}d'_{hk}.$$

若令 D_n 表以可除代数 D 中元素作成的矩阵全体，则对于通常矩阵的运算，它作成 F 上代数．易见，由上面的讨论得，对应

$$a=\sum_{i,j}e_{ij}d_{ij}\mapsto(d_{ij})$$

给出 $F_n\otimes D$ 到 D_n 上的同构对应．

利用 § 2 中例 4 中用过的方法，同样可证得 D_n 是 F 上的单代数，其维数为 $n^2\cdot(D:F)$． ▌

在张量积的应用中，最常遇到的问题是，什么时候有单位元1的代数A可分解成两个含单位元1的子代数的张量积．先引入

定义 1.5.3 B是代数A的子代数，称$C=\{x\in A \mid xb=bx, \forall b\in B\}$为$B$在$A$中的中心化子．

易见B的中心化子C是A的子代数．

定理 1.5.6 设F上代数A有单位元1．若M是A的全矩阵子代数，其单位元也是1，则有$A=M\otimes C$，其中C是M在A中的中心化子．

证 设$e_{ij}, i, j=1,\cdots,m$，是M的由矩阵单位组成的基．设$a\in A$，令

$$a_{hk}=\sum_{u=1}^{m} e_{uh}ae_{ku}, \tag{5}$$

则

$$e_{ij}a_{hk}=e_{ih}ae_{kj}=a_{hk}e_{ij}.$$

故有$a_{hk}\in C$。反之，若$c\in C$，则$c=c_{11}$。故得

$$C=\{a_{hk}, \forall a\in A, h,k=1,\cdots,m\}.$$

因为 $1=\sum\limits_{i=1}^{m} e_{ii}$ 是A的单位元，故由(5)得

$$\sum_{i,j} e_{ij}\, a_{ij}=\sum_{i,j,u} e_{ij}e_{ui}ae_{ju}=\sum_{i,u} e_{ii}ae_{uu}=a.$$

这样便有$A=MC$．另一方面若对任意$x^{ij}\in C$有$\sum\limits_{i,j} e_{ij}x^{ij}=0$，则

$$0=e_{pp}\left(\sum_{i,j} e_{ij}\, x^{ij}\right)e_{qq}=\sum_{i,j} e_{pp}e_{ij}e_{qq}x^{ij}=x^{pq}e_{pq}, \forall p,q.$$

由之

$$x^{pq}=\sum_{i=1}^{n} e_{ip}x^{pq}e_{pq}e_{qi}=0.$$

依定理1.5.3知$A=M\otimes C$． ∎

习　题

1．证明定理 1.1.1—1.1.3．

2．给出四元数代数关于基 $1,i,j,k$ 的正则表示，这个表示可约吗？

3．给出全矩阵代数关于基 e_{ij} 的正则表示，这个表示可约吗？

4．给出四元群在有理数域上的群代数的一个正则表示，这个表示可约吗？

5．$G=\langle a\rangle$ 是 n 阶循环群，$n>1$．证明群代数 $F[G]$ 的正则代数模是可约的，并找出一个非零真子模．从而它的正则表示也是可约的，写出一个等价表示形如 $\begin{pmatrix} T_1(a) & S(a) \\ 0 & T_2(a) \end{pmatrix}$．

6．3×3 上三角阵 N 的正则表示忠实吗？将 N 嵌入有单位元的代数，求出一个忠实表示．

7．证明定理 1.4.4 的充分性．

8．仿照代数的直和定义，定义代数模的内直和及外直和．

9．设 U 是代数 A 的代数模，且 U 是 F 上有限空间．U 是弱单 A 模的直和，当且仅当 U 的任一个 A 子模都是直和项．

10．设 N 是 A 模 M 的 A 子模，而 $\varphi: M\to N$ 是 A 模 M 到 A 模 N 的同态对应，有性质 $x\varphi=x,\forall x\in N$．证明 N 是 M 的直和项．

11．用第二种方法证明代数 B,C 的外张量积由 B,C 唯一确定，与基底选择无关．

(提示：给定 F 上代数 B,C，分别取基 $b_1,\cdots,b_s$，$c_1,\cdots,c_t$，以 b_ic_h 为基作外张量积 $B\otimes C$．B,C 及 $B\otimes C$ 的乘法表如定理 1.5.1 所述．

令 $A'=\{x_1b_1+\cdots+x_sb_s\mid\forall x_i\in C\}$ 规定 A' 中两元素 $\sum\limits_i x_ib_i=\sum\limits_i y_i b_i$ 当且仅当 $x_i=y_i,\forall i$，定义加法：

$$\sum x_ib_i+\sum y_ib_i=\sum(x_i+y_i)b_i;\text{数乘：}\alpha\sum x_ib_i=\sum(\alpha x_i)b_i;$$

乘法：$\left(\sum\limits_i x_ib_i\right)\left(\sum\limits_j y_jb_j\right)=\sum\limits_n\left(\sum\limits_{ij}x_iy_j\beta_{ij}^n\right)b_n$．验证 A' 成 F 上代数．

令 $\varphi: A\to A'$，$\sum\limits_{i,h}\alpha_{ih}(b_ic_h)\mapsto\sum\limits_i\left(\sum\limits_h\alpha_{ih}c_h\right)b_i$．证明 φ 是同构.)

12．设 Q 是实数域 F 上四元数代数，证明：$Q\otimes_F Q\simeq F_4$．(提示：参看

Jacobson《抽象代数学》卷Ⅰ,练习 31.)

13. 设 Q 是实数域 F 上的四元数代数，而 K 是实数域 F 上的复数代数，证明 $Q\otimes_F K\simeq K_2$。

14. 设 K 同上，证明 $K\otimes_F K\simeq K\oplus K$。

15. 在代数 A 中有 $A'=B\otimes C$。对任意代数 A_1，如果 A_1 有子代数 B_1，C_1，使 $b_1c_1=c_1b_1$，$\forall b_1\in B_1$，$c_1\in C_1$ 以及 $B\overset{\varphi}{\simeq}B_1$，$C\overset{\Psi}{\simeq}C_1$，证明存在唯一的满同态对应 $\theta: B\otimes C\to B_1C_1$ 使 $(bc)\theta=(b\varphi)(c\Psi)$，$\forall b\in B$，$c\in C$。这一性质叫作(内)张量积的泛性。

16. 利用泛性证明(内)张量积的唯一性：若 $A=B\otimes C$，$A_1=B_1\otimes C_1$，而 $B\simeq B_1$，$C\simeq C_1$ 则 $A\simeq A_1$。

17. 证明代数 B，C 的外张量积总可以看作某一代数 A 中的内张量积。从而外张量积由 B，C 唯一决定，与基底选择无关。(提示：分别讨论 B，C 有单位元和没有单位元两种情况。)

上述三题给出了张量积唯一性的另一种证明。

18. 设 F 是代数闭域，证明，F 上有限维可除代数只有一个，即 F 本身。去掉“有限维”这个条件，此命题是否成立？

19. 设 R 是有单位元 1 的环，且 R 中存在集 $E=\{e_{ij}\mid i,j=1,\cdots,n\}$，具有性质：1) $e_{ij}e_{kl}=\delta_{jk}e_{il}$，2) $\sum_{i=1}^{n}e_{ii}=1$。证明：$R\simeq B_n$，此处 B 是 E 在 R 中的中心化子，即 $B=\{x\mid x\in R, xe_{ij}=e_{ij}x, \forall e_{ij}\in E\}$。

第二章　N-根与 N-半单代数

在本章中，我们将定义幂零根或 N-根和 N-半单代数．这样便把同存在于一个有限结合代数内部的两种成分——幂零成分和半单成分在一定意义下分划出来．这种方法成为研究环、代数以及群等许多代数系统的重要格式之一．

在本章中代数永远指结合代数．

§1　幂零元与幂等元

在整个有限代数类中，在第一章中曾看到有幂零代数和半单代数这两种在某种意义上对立的代数类．同样在一个代数的内部也有从乘法角度来看截然对立的元素类，一种是和零元相类的幂零元，一类是和单位元相类的幂等元．

定义 2.1.1　在代数 A 中，有性质 $a^n=0$，n 是自然数，的元素称作幂零元．当 $a^n=0$ 而 $a^{n-1}\neq 0$ 时，称 a 的幂零指数为 n．零元的幂零指数是 1．

定义 2.1.2　在代数 A 中，若元素 $e\neq 0$ 且 $e^2=e$，就称 e 为幂等元．

显然，幂零代数的元素都是幂零的．反过来，我们有下面重要的

定理 2.1.1　设 A 是有限结合代数，若 A 的每一个元素都是幂零的，则 A 必是幂零代数．

证　A 是有幂零子代数的，例如任意幂零元素 a 生成的子代数 $\langle a\rangle$ 都是，或者更简单的说，$\{0\}$ 就是．由于 A 是有限维的，所以必存在 A 的一个幂零子代数 B，在所有幂零子代数中，它的维数极大（即没有比 B 维数真大的幂零子代数）．由之得任意真正含 B

（即含 B 而异于 B 者）的子代数 A_1 必不是幂零代数．

若 $B=A$，则定理得证．今证若 $B\subset A$，则必将引出矛盾．设幂零代数 B 的幂零指数为 m．

任取 $a\notin B$．由 $B^m aB^m=\{0\}\subseteq B$ 而 $a\notin B$，则逐步从 a 的两侧乘以 B，必可达到非负整数 s,t，使

$$C=B^s aB^t\nsubseteq B \text{ 而 } CB=B^s aB^{t+1}\subseteq B, BC=B^{s+1}aB^t\subseteq B. \quad (1)$$

任取元素 $c\in C$ 而 $c\notin B$，则

$$B_1=\{x+y \mid x\in B, y\in\langle c\rangle\}$$

是子代数且其维数大于 B 的维数．

另一方面，若设幂零元素 c 的幂零指数是 l，利用(1)，则有

$$B_1^{ml}=(B+\langle c\rangle)^{ml}\subseteq(B+\langle c\rangle^l)^m=B^m=\{0\},$$

即 B_1 是幂零代数．这和 B 的选择相矛盾，故得定理．❙

附注　上述定理有很多推广．这里所用的证明给出一个显然的推广．说一个代数对其子代数有极大条件，若在其子代数组成的任意非空集中，有一个极大者，即它不包含在此集中任何其他子代数中．显然，有限代数对其子代数有极大条件．这样读者不难验证，定理 2.1.1 可推广为：每一个元素都是幂零的结合代数 A，若还知 A 对子代数有极大条件，则 A 必是幂零代数．

定理 2.1.2　设 A 是有限结合代数，若 A 不是幂零代数，则 A 中有幂等元．

证　设 W 是 A 中一切非幂零子代数之集．$A\in W$，故 W 不空．由于 W 中都是有限维代数且维数小于或等于 A 的维数，故必有一子代数 $B\in W$，B 的维数在 W 中为极小者．由此知子代数 B 是非幂零的而 B 的任意真子代数都是幂零的．B 中至少必有一非幂零元 b，否则，依定理 2.1.1，B 将是幂零的了．b 是非幂零元，则对任意正整数 n，b^n 也是非幂零元，因而 $\langle b^n\rangle$ 都是非幂零代数．由 B 之选择得 $B=\langle b^n\rangle$，$n=1,2,\cdots$．

特别有 $b\in\langle b^3\rangle$．因而 $b=f(b^3)$，这里 $f(x)$ 是基础域 F 上无常数项的多项式，这样

$$b=bg(b)b,$$

其中 $g(x)$ 是 F 上无常数项的多项式，因而有 $g(b)\in B$。由于 $b\neq 0$，元素 $e=bg(b)\neq 0$，且

$$e^2=bg(b)bg(b)=bg(b)=e.$$

e 即是所求的幂等元。 ▎

§ 2 幂零根(或 N-根)

在本节中将证明，任一有限代数 A 都含一唯一最大的幂零理想 N，它包含 A 中一切幂零左理想，幂零右理想，且商代数 A/N 不再有非零的幂零理想了。

预理 1 幂零代数的子代数和商代数都是幂零代数。 ▎

预理 2 设 B 是代数 A 的理想。若 B 和 A/B 都是幂零代数，则 A 也是。

证 设幂零代数 A/B 和 B 的幂零指数分别为 m 与 k，则由

$$(A/B)^m=0$$

知 $A^m\subseteq B$。因此

$$(A)^{mk}=(A^m)^k\subseteq(B)^k=\{0\}. \quad ▎$$

预理 3 代数 A 的任意两个(因而任意有限个)幂零理想之和仍为幂零理想。

证 设 B_1, B_2 是 A 的幂零理想。首先知理想的和 $B_1+B_2=C$ 是 A 的理想。其次

$$C/B_1=(B_1+B_2)/B_1\simeq B_2/B_1\cap B_2.$$

由预理 1,2 知理想 C 是幂零的。 ▎

预理 4 设 B 是代数 A 的幂零单侧理想，则 B 必包含在 A 的一个幂零理想中。

证 例如设 B 是幂零右理想，其幂零指数为 k。作 $I=B+AB$。易见 I 是理想，而在 $I^k=(B+AB)^k$ 的展开式中每一项必是 s 个 B 和 t 个 AB 的乘积，而 $s+t=k$，其形状，例如可能是

$$(AB)\cdot B\cdots B(AB)\cdots(AB)(AB)\cdots B.$$

注意到 B 是右理想，除去可能有一个位于最左端的 A 之外，每一个

A因子可用其左侧的因子B吸收掉，因而便有

$$I^k=(B+AB)^k\subseteq A(B)^k+(B)^k=\{0\}. \quad \blacksquare$$

现在可以证明主要定理了.

定理 2.2.1 设A是有限结合代数，则在A中存在唯一最大的幂零理想N，具有性质

i) N包含A中一切幂零单侧理想；

ii) A/N中没有非零的幂零理想.

证 令N是A中一切幂零理想之和，则N是A的理想，但A是有限维，N也必是有限维的. 因而N实际上是有限个幂零理想之和. 由预理 3 知，N是幂零的. 这样幂零理想N包含一切幂零理想，故N是唯一最大的幂零理想. 由预理 4 还知，N还包含一切幂零单侧理想. 这样便得 i).

若A/N有非零幂零理想B/N，B真包含N，则由B/N及N都是幂零的，由预理 2 知，B也是幂零的. 另一方面还知，B是A的理想. 这样B是真包含N的幂零理想，这与 i)矛盾，故得 ii). $\blacksquare$

在定理 2.2.1 的基础上，可以给出下面的

定义 2.2.1 我们称有限结合代数A的唯一最大幂零理想为A的幂零根或N-根.

N-根为零的有限结合代数叫作N-半单代数.

定义中的字母N指幂零性，N-根意指关于幂零性的根而N-半单意指关于幂零性是半单的. 不久我们将证明N-半单代数即是半单代数.

上述主要定理把对于一般有限结合代数A的结构的研究归结为下面三个问题：

（一）关于N-根本身，亦即幂零代数结构的研究；

（二）关于N-半单代数结构的研究；

（三）给定幂零代数B和N-半单代数S. 找出一切结合代数A，它含有一个与B同构的N-根N且$A/N\simeq S$，亦即找出由幂零代数B借助于N-半单代数S所得到的一切扩张.

定理 2.2.1 以及由它引出的上述三个问题是研究代数系统

(例如,非结合代数、环、模、群等)结构的重要途径. 许许多多的研究都是在这一模式下进行的. 也可以说是以代数系统的扩张这一构成方法为核心而展开的关于代数系统结构的研究.

下面给出一批 N-半单代数的例子作为本节的结束. 设 F 是任意域, G 是有限群, 则由第一章 § 2 的例 7 可作出有限结合代数 $F[G]$. 实际上不假定群 G 是有限的, 按照那里的方法也可作出(不一定有限)结合代数 $F[G]$,它的元素有形式: $a=\sum_{x\in G}\alpha_x x$, $\alpha_x\in F$, $x\in G$, 且只有有限个 α_x 不为零.设 $a=\sum_{x\in G}\alpha_x x$ 是 $F[G]$ 中任意元素, 令 $\mathrm{tr}(a)$表示 a 的表示式里群 G 的恒等元 1 的系数: $\mathrm{tr}(a)=\alpha_1$, 则容易验证: $\mathrm{tr}(a+b)=\mathrm{tr}(a)+\mathrm{tr}(b)$ (可推广到有限和), $\mathrm{tr}(\alpha a)=\alpha\,\mathrm{tr}(a)$, $\mathrm{tr}(ab)=\mathrm{tr}(ba)$, 其中 $\alpha\in F$, $a,b\in G$.

下面的定理将给出一批N-半单代数的例子,在证明定理的过程中我们要用到:

预理 5 设 A 是域 F 上结合代数,用 $[A,A]$ 表示由 A 里一切交换子$[a,b]=ab-ba$ 生成的子空间,如果 $\mathrm{char}\ F=p>0$, $q=p^n$, $n\geqslant 1$ 是整数,则对 A 中任意 m 个不同元素 $a_1,\cdots,a_m$,有:

$$(a_1+\cdots+a_m)^q=a_1^q+\cdots+a_m^q+b,$$

其中 $b\in[A,A]$.

证 按分配律展开, $(a_1+\cdots+a_m)^q=a_1^q+\cdots+a_m^q+b$, 其中 b 是一些乘积 $a_{i_1}\cdots a_{i_q}$ 的和, 而 $i_1,\cdots,i_q$ 取自 $\{1,\cdots,m\}$ 且至少有两个是不相同的.设 $w=a_{i_1}\cdots a_{i_q}$ 是 b 中一项,我们把 $a_{i_1},\cdots,a_{i_q}$ 看作不可换未定元,并把 q 阶循环群 $C_q=\langle\alpha\rangle$ 作用在 w 上: 规定 $w\alpha=a_{i_2}\cdots a_{i_q}a_{i_1}$, $w\alpha^{q-1}=a_{i_q}a_{i_1}\cdots a_{i_{q-1}}$.注意到 $w\alpha^j-w=a_{i_{j+1}}\cdots a_{i_q}a_{i_1}\cdots a_{i_j}-a_{i_1}\cdots a_{i_q}=dc-cd\in[A,A]$,其中 $c=a_{i_1}\cdots a_{i_j}$, $d=a_{i_{j+1}}\cdots a_{i_q}$.故 $w\alpha^j=w+x_j$, $x_j\in[A,A]$. 令 $B=\{\beta\in C_q\,|\,w\beta=w\}$, 则 B 是 C_q 的一个子群. 显然 $B\neq C_q$, 否则, $i_1=\cdots=i_q$. 在 w, $\cdots$, $w\alpha^{q-1}$ 里不同的字的个数恰等于商群 C_q/B 的阶数, 所以是 q 的因子,故为 p^s, $0<s\leqslant n$. 这 p^s 个元素都出现在 b 中且每个只

出现一次，它们的和为 $p^s w+\sum_{j=1}^{p^s-1} x_j=\sum_{j=1}^{p^s-1} x_j\in[A,A]$，因为$F$特征为 p. 我们把这 p^s 个元素作为一类，按这种方法把 b 中元素分类，显然不同的类是不相交的. 因为每一类中元素的和属于 $[A,A]$，故 $b\in[A,A]$. ▎

定理 2.2.2 设 $\operatorname{char}F=p>0$，群 G 里没有阶数为 p 的元素，则$F[G]$里没有完全由幂零元素组成的非零理想.

证 设 $a=\sum_{x\in G}\alpha_x x$ 是$F[G]$中幂零元，则有适当大的 n，使 $q=p^n$, $a^q=0$. 故 $a^q=\left(\sum_{x\in G}\alpha_x x\right)^q=\sum_{x\in G}\alpha_x^q x^q+b=0$，其中 $b\in[F[G],F[G]]$. 注意到$\operatorname{tr}([c,d])=0$，对一切$c,d\in F[G]$，故 $\operatorname{tr}(b)=0$，所以 $0=\operatorname{tr}(a^q)=\operatorname{tr}\left(\sum_{x\in G}\alpha_x^q x^q+b\right)=\operatorname{tr}\left(\sum_{x\in G}\alpha_x^q x^q\right)=\sum_{x^q=1}\alpha_x^q=\left(\sum_{x^q=1}\alpha_x\right)^q$. 注意到$G$中没有阶为 p^i 的元素，故 $x^q=1$ 当且仅当 $x=1$. 故 $\sum_{x^q=1}\alpha_x=\alpha_1$，故 $\operatorname{tr}(a)=\alpha_1=0$.

设 I 是 $F[G]$的理想，其元素都是幂零的. 设 $a=\sum_{x\in G}\alpha_x x\in I$，则对每个 x 也有 $ax^{-1}\in I$ 是幂零元，故 $\alpha_x=\operatorname{tr}(ax^{-1})=0$. 由于每个 $\alpha_x=0$，故 $a=0$. 所以 $I=0$. ▎

在G是有限群的时候，$F[G]$的 N-根是幂零的，故当然是由幂零元组成的，作为上面定理的推论，我们有：

定理 2.2.3 设 $\operatorname{char}F=p>0$，G是没有 p阶元素的有限群，则$F[G]$是 N-半单代数.

在第六章中，我们将从另一个角度再来讨论上面这个定理.

§3 Peirce 分解

我们在此引入下面这个有用的概念.

定义 2.3.1 设 A 为代数，S 为 A 的一个子集。令 $R_S=\{x\in A\mid Sx=0\}$。我们称 R_S 为集 S 的、在 A 中的右零化子，称 R_S 中的元素为 S 的右零化元。类似地，称 $L_S=\{x\in A\mid xS=0\}$ 为 S 在 A 中的左零化子，称其中元素为 S 的左零化元。

易见 $R_S(L_S)$ 是 A 的右(左)理想。

设 e 是代数 A 的一个幂等元. e 的右零化子 $R_e=\{a-ea\mid a\in A\}$，这是因为，形如 $a-ea$ 的元素是 e 的右零化元，而若 b 是 e 的右零化元，则有 $eb=0$，因而 $b=b-eb$，即 b 也具有这种形式. 类似地可得 $L_e=\{a-ae\mid a\in A\}$.

利用幂等元 e 可以把 A 中元素表成一些有特殊性质的元素之和.

例如

$$a=(a-ea)+ea, \tag{1}$$

$$A=R_e+eA. \tag{2}$$

e 是右理想 eA 的左单位元且是右理想 R_e 中元素的左零化元. 这样 A 便表成关于 e 有特殊性质的一些元素的和. 易见 $R_e\cap eA=\{0\}$，因而这种表示法还是唯一的. 称(1)为元素 a 关于幂等元 e 的 Peirce 左分解；称(2)为代数 A 关于幂等元 e 的 Peirce 左分解.

类似地，我们有

$$a=(a-ae)+ae,$$

$$A=L_e+Ae,$$

顺序称之为元素 a 或代数 A 关于 e 的 Peirce 右分解.

把这两种分解结合起来，可以得到更加细的分解. 直接计算可验证

$$a=eae+(ea-eae)+(ae-eae)+(eae-ea-ae+a). \tag{3}$$

右侧第一类元 eae 的全体是 eAe，它是以 e 为单位元的子代数；第二类元 $ea-eae$ 的全体是 eL_e，它是以 e 为左单位元，以 e 为右零化元的子代数；第三类元 $ae-eae$ 的全体 R_ee，它是以 e 为左零化元，以 e 为右单位元的子代数. 第四类元的全体 B_e 刚好是 A 中一

切满足性质 $xe=ex=0$ 的元素 x 组成的，这是因为，这种形状的元素显然从左右零化 e，而若 $xe=ex=0$，则 $x=exe-ex-xe+x$ 也具有这种形状．这样，我们有

$$A=eAe+eL_e+R_e e+B_e(\text{子空间的直和}), \tag{4}$$

并且它们之间有下列关系：

$$R_eL_e\subseteq B_e,\quad L_eA\subseteq L_eR_e,\quad AR_e\subseteq L_eR_e. \tag{5}$$

我们将(5)中各式的证明留给读者．

将称(3)，(4)顺序为元素 a 或代数 A 关于 e 的 Peirce 分解．

这样，给定代数 A 的一个幂等元，就相应地有 A 关于 e 的 Peirce 分解．如果把 eAe（它是以 e 为单位元的那一部分）看作这个分解的主要部分，那末希望 eAe 尽可能的大，或者要求 eAe 尽可能的小，我们就得到两种有特殊性质的幂等元类．

说两个幂等元 e,f 是正交的，若有 $ef=fe=0$．易见正交幂等元之和仍是幂等元．

定义 2.3.2 代数 A 的一个幂等元 e 叫作 A 的主幂等元，如果 A 中没有与之正交的幂等元．

定义 2.3.3 代数 A 的一个幂等元 e 叫作 A 的本原幂等元，如果在 A 中 e 不能表成两个正交的幂等元之和．

预理 1 e,f 是代数 A 中两个幂等元且 $e\neq f$ 则 $ef=fe=f$，当且仅当 $e=f+f_1$，其中 f_1 是幂等元且与 f 正交．

证明时只要取 $f_1=e-f$ 即可．由此预理直接得到

预理 2 e,f 是代数 A 的两个幂等元，$e\neq f$，则 $fAf\subset eAe$ 当且仅当 $e=f+f_1$，其中 f_1 是幂等元且与 f 正交．

证 若 $fAf\subseteq eAe$，则 $f=fff\in eAe$，因而 $ef=fe=f$，故由预理 1 知 e 可表为正交幂等元 f 和 f_1 的和．

反之，若 $e=f+f_1$，则由预理 1，$ef=fe=f$．故

$$fAf=(ef)A(fe)=e(fAf)e\subseteq eAe.$$

若是 $eAe=fAf$，则 $e\in fAf$，而有 $e=fe=f$，与假设 $e\neq f$ 矛盾，故必有 $fAf\subset eAe$． ▎

预理 3 e 是有限代数 A 的主幂等元当且仅当 eAe 在所有

fAf，f 是幂等元，中是极大者(即不存在 $fAf \supset eAe$)．▎

定理 2.3.1 (一)若 f 是有限代数 A 的幂等元而不是主幂等元，则必有 A 的一个主幂等元 e，使得 $e=f+f_1$，f_1 是与 f 正交的幂等元；

(二) 有限代数 A，若不是幂零的，必有主幂等元．

证 (一) 依假设，由预理 3 知 fAf 不是极大者．即存在幂等元 e'，使 $e'Ae' \supset fAf$．这样真包含 fAf 的所有 e_1Ae_1 组成的集是不空的．由于 A 是有限维，故该集中有维数最大者，说是 eAe，它也是 A 中一切 $f'Af'$ 中的一个极大者．由预理 2 知，$e=f+f_1$，f，f_1 是正交的幂等元．

(二) 由假设，依定理 2.1.2，知 A 有幂等元，因而由(一)，A 有主幂等元．▎

定理 2.3.2 设 A 是有限代数而 e 是幂等元．下述条件是等价的：

i) e 是本原的，

ii) eAe 在所有 fAf(f 是幂等元)中是极小者，

iii) e 是 eAe 中仅有的幂等元．

证 i)⇒ii)，若有 $fAf \subset eAe$，则由预理 2 知，$e=f+f_1$，f，f_1 是正交幂等元，这与 e 是本原的相矛盾．故 eAe 是极小者．

ii)⇒i)，若有 $e=f+f_1$，f，f_1 是正交幂等元，则易证 $fAf \subseteq eAe$，又由

$$ef=fe=f, \quad ef_1=f_1e=f_1, \quad ff_1=f_1f=0$$

知 $f_1 \notin fAf$ 而 $f_1 \in eAe$，故有 $fAf \subset eAe$，这与假设 eAe 是极小者是矛盾的．故得 e 是本原的．

关于 iii)的证明留给读者．▎

定理 2.3.3 有限代数 A 的任一非本原幂等元 e 必可表成 A 的有限个两两正交本原幂等元之和：

$$e=e_1+\cdots+e_t, \quad e_ie_j=\delta_{ij}e_i, \quad e_i \text{ 是本原幂等元}.$$

证 易见两两正交的幂等元集必是线性无关的，因而其个数不能超过有限代数 A 的维数．

e 非本原的，故 e 至少是两个正交幂等元之和．设 e 能表成两两正交幂等元之和的最大长度是 t 而 $e=e_1+\cdots+e_t$，今证每一 e_i 必是本原的．用反证法，若有一 e_i，说是 e_1，不是本原的，则 $e_1=u+v,u,v$ 是正交幂等元．因而有

$$e_1u=ue_1=u,\ e_1v=ve_1=v.$$

由之得，当 $i\neq1$，

$$e_iu=e_ie_1u=0,\ 同理\ ue_i=ve_i=e_iv=0,$$

即 $e=u+v+e_2+\cdots+e_t$ 是两两正交 $t+1$ 个幂等元之和．这与 t 之意义是矛盾的．▌

这样，每一幂等元都可以"扩展"成主幂等元，也都可分解成两两正交本原幂等元之和．

§4 N-半单代数的结构定理

我们先看一下，代数 A 关于主幂等元的 Peirce 分解与 A 的 N-根 N 之间的关系，即证

预理 1 设 e 是有限代数 A 的主幂等元，而 N 是 A 的 N-根，A 关于 e 的 Peirce 分解为

$$A=eAe+e\cdot L_e+R_e\cdot e+B_e,$$

则有 $e\cdot L_e+R_e\cdot e+B_e\subseteq N$．

证 由于 e 是主幂等元，则子代数 B_e 中不能含有幂等元，因而 B_e，依定理 2.1.2，是幂零子代数．由 §3，(5)，有 $R_eL_e\subseteq B_e$．若 $B_e^m=\{0\}$，则 $(L_eR_e)^{m+1}=L_e(R_eL_e)^mR_e\subseteq L_eB_e^mR_e=\{0\}$．故 L_eR_e 是 A 的幂零理想，因而 $L_eR_e\subseteq N$．由 §3，(5)，我们还有

$$L_e^2\subseteq L_eA\subseteq L_eR_e,\ R_e^2\subseteq AR_e\subseteq L_eR_e,$$

即 L_e 是幂零左理想而 R_e 是幂零右理想．故 $L_e\subseteq N,R_e\subseteq N$，即有 $e\cdot L_e+R_e\cdot e+B_e\subseteq L_e+R_e\subseteq N$．▌

当 A 是 N-半单代数，则由定理 2.3.1，A 有主幂等元 e．由上面预理 1 便知 $A=eAe$，因而有

定理 2.4.1 N-半单代数 A 有单位元．▌

定理 2.4.2 N-半单代数A的任意非零理想B本身也是N-半单代数.

证 设有限代数B的N-根为R,则$BRB\subseteq R$,故BRB是幂零的. 另一方面,由于B是A的理想,BRB也是,故得BRB是A的幂零理想. 由代数A的N-半单性得:$BRB=0$。

今考察ARA,由

$$(ARA)^3\subseteq(ARA)R(ARA)\subseteq BRB=0,$$

故ARA是A的幂零理想,因而$ARA=0$。但由定理 2.4.1,A有单位元,故$R\subseteq ARA=0$,即$R=0$,即B是N-半单代数. ❙

定理 2.4.3(N-半单代数的主要结构定理) A是有限结合代数. A是N-半单代数当且仅当A是有限个单代数的直和(亦即半单代数).

为此先证下面的

预理 2 设C是代数A的理想且C有单位元e,则C必是A的直和项.

证 考虑A关于幂等元e的 Peirce 分解:

$$A=eAe+e\cdot L_e+R_e\cdot e+B_e.$$

由于C是理想而$e\in C$且是C的单位元,故有$eAe+e\cdot L_e+R_e\cdot e=C$且$B_eC=CB_e=0$. 由之得$B_e$是$A$的理想. 故得$A=C\oplus B_e$,即$C$是$A$的直和项. ❙

由预理 2,以及定理 2.4.2 和定理 2.4.1,便得

预理 3 N-半单代数A的每一个理想都是A的直和项. ❙

定理 2.4.3 的证明. 在第一章 §4 的例 3)中,我们证明了半单代数的非零理想都是一些单代数的直和,因而不能有非零的幂零理想,即半单代数必是N-半单代数。

反之,设A是N-半单代数,则由预理 3 以及定理 1.4.4 便知A是半单代数,然而为了完整,我们这里给出证明.

若A没有真理想,则由A是N-半单代数,$A^2\neq 0$,因而A是单代数,亦即是半单代数.

若A有真理想,则由预理 3,A可表成真理想的直和. 设A

能分解成其理想$B_1,\cdots,B_t$的直和$A=B_1\oplus\cdots\oplus B_t$，而个数$t$是这类表示中的最大可能者，由于$A$是有限维，这样的$t$是存在的。

今证每一B_i本身必是单代数。若不然，有某一B_i，例如B_1，不是单代数。由定理2.4.2，B_1是N-半单的，由预理3，$B_1=C\oplus C_1, C\neq 0, C_1\neq 0$。这样将有$A=C\oplus C_1\oplus B_2\oplus\cdots\oplus B_t$，这与$t$的意义是矛盾的，故每一$B_i$都是单代数。

这样N-半单代数是半单代数。 ▎

有了N-半单代数的主要结构定理，今后可以不必再区分N-半单代数与半单代数了。

利用第一章§4的例3)中的讨论可直接得到

定理 2.4.4(N-半单代数的唯一性定理) N-半单代数A表成单代数直和的方法，若不计直和项的顺序，是唯一的。即是，若

$$A=B_1\oplus\cdots\oplus B_t=C_1\oplus\cdots\oplus C_s,$$

其中B_i, C_i都是单代数，则必$t=s$且$B_i=C_{\pi(i)}, i=1,\cdots,t$，而$\pi$是一个$t$元置换。

这样，N-半单代数的研究就归结为对单代数的研究。

§5 单代数的结构定理

我们已经知道，域F上全矩阵代数F_n(见第一章§2，例4)，以及更一般地可除代数与F_n的张量积(见定理1.5.5)都是单代数。本节将证明单代数也只有这一些。在本节中A永远表有限单代数。

由定理2.4.1 知有限单代数是有单位元的。

预理 1 e是单代数A的幂等元，则eAe是单代数。

证 设$0\neq B$是eAe的理想，则

$$eAe\cdot B\cdot eAe=eABAe\subseteq B。$$

ABA是A的理想，因为A有单位元，而有$ABA\neq 0$。再由A的单性得$ABA=A$，即得$eAe=eABAe\subseteq B$。这样，得eAe没有真理想。

另一方面，eAe有单位元e，故它不会是幂零代数，因而其平

方不为零。故 eAe 是单代数. ∎

定理 2.5.1 设 A 是有限单代数，e 是幂等元，则 eAe 是可除代数当且仅当 e 是本原幂等元.

证 若 eAe 是可除代数，则 e 是 eAe 中唯一的幂等元. 由定理 2.3.2 知 e 是本原的.

反之，若 e 是本原的，今证 $0\neq a\in eAe$ 必有逆元. 为此考察 eAe 的非零右理想 $aeAe$，由预理 1 知 eAe 是单的，因而是 N-半单的，故 $aeAe$ 不是幂零的. 依定理 2.1.2，$aeAe$ 中有幂等元 f. 但已知 e 是本原的，依定理 2.3.2，eAe 只有一个幂等元 e，故 $f=e$，随之有 $b\in eAe$，使得 $ab=e$。类似可得 c，使 $ca=e$。故 a 是可逆元，即 eAe 是可除代数. ∎

定理 2.5.2(单代数的结构定理) A 是 F 上有限单代数 $\Longleftrightarrow A=F_n\otimes D$，其中 D 是 F 上有限可除代数.

证 设 A 为有限单代数，则 A 有单位元 1。依定理 2.3.3，有

$$1=e_1+\cdots+e_m,$$

其中 e_i 组成两两正交本原幂等元集. 令

$$A_{ij}=e_iAe_j,\ i,j=1,\cdots,m.$$

直接计算可得

$$A_{ij}A_{hk}=\delta_{jh}A_{ik}. \tag{1}$$

其中 δ_{jh} 是 Kronecker 符号.

下一步想从每一子代数 A_{ij} 中各选一个元素能组成一组矩阵单位.

首先我们注意到 A_{ij} 中的元素 a_{ij} 具有性质

$$e_ia_{ij}=a_{ij}e_j=a_{ij},$$

$$e_ha_{ij}=a_{ij}e_k=0,\quad h\neq i,\ j\neq k,$$

我们从 A_{11} 中选定元素 $e_{11}=e_1$. 当 $j>1$，由 $A_{1j}A_{j1}=A_{11}$ 得，必有 $e_{j1}\in A_{j1}$，使得 $0\neq A_{1j}e_{j1}\subseteq A_{11}$. 因而必有 $a_{1j}\in A_{1j}$，使

$$0\neq a_{1j}e_{j1}\in A_{11}.$$

但 $A_{11}=e_1Ae_1$ 是可除代数 (定理 2.5.1)，故有 $a_{11}\in A_{11}$ 使 $a_{11}a_{1j}e_{j1}=e_1$，取 $e_{1j}=a_{11}a_{1j}\in A_{1j}$，则有

$$e_{1j}e_{j1}=e_{11}=e_1.$$

规定

$$e_{ij}=e_{i1}e_{1j}\in A_{ij},i,j=1,\cdots,m.$$

当 i 或 $j=1$ 时，这就是上面有过的等式．直接计算，得

$$e_{ij}e_{jk}=e_{i1}e_{1j}e_{j1}e_{1k}=e_{i1}e_{11}e_{1k}=e_{ik}. \tag{2}$$

而由(1) 得

$$e_{ij}e_{hk}=0,\quad j\neq k. \tag{3}$$

由(2) 知 $e_{ij}\neq 0$. 这样我们得到一组矩阵单位 e_{ij}. 以之为基便得单代数 A 的全矩阵子代数 F_m.

由(2) 知$(e_{ii})^2=e_{ii}\neq 0$ 是 e_iAe_i 的幂等元，但 e_i 是本原的，因而 e_iAe_i 只有一个幂等元 e_i，故当 $i\geqslant 2$ 时也有 $e_{ii}=e_i$. 这样

$$e_{11}+e_{22}+\cdots+e_{mm}=e_1+\cdots+e_m=1,$$

即 F_n 与 A 有相同的单位元.

由定理 1.5.5, $A=F_n\otimes D$, 其中 D 是 F_n 在 A 中的中心化子.

剩下来要证的是 D 为可除代数，由

$$A=e_{11}D+e_{12}D+\cdots+e_{mm}D$$

以及 $e_{ij}D=De_{ij}$，得 $e_{11}Ae_{11}=e_{11}D$. 注意到 $e_{11}d=de_{11}$, $\forall d\in D$ 以及$e_{11}^2=e_{11}=e_1$，故得

$$D\simeq e_{11}D=e_1Ae_1.$$

由 e_1 是本原的，由定理 2.5.1，知 e_1Ae_1 是可除代数. 故得 D 是可除代数. ∎

设 A 为有单位元 1 的代数，若 g 是 A 的可逆元；即有 $gg^{-1}=g^{-1}g=1, g^{-1}\in A$，则对应

$$x\to gxg^{-1}$$

显然是代数 A 的一个自同构对应. 我们将称之为代数 A 的**内自同构对应**.

定理 2.5.3(关于单代数的唯一性定理) 若有限单代数 $A=M\otimes D=M'\otimes D'$, 其中 M, M' 是 F 上全矩阵代数而 D, D' 是有限可除代数，则存在可逆元 $g\in A$, 使 $M'=gMg^{-1}$, $D'=$

gDg^{-1}.

证 设 $e_{ij}, i,j=1,\cdots,m; f_{ij}, i,j=1,\cdots,l$ 顺序为 M, M' 的由矩阵单位组成的基. 不妨设 $m\leqslant l$. 由于 A 与其子代数 M, M' 有共同的单位元 1,故

$$1=e_{11}+\cdots+e_{mm}=f_{11}+\cdots+f_{ll}. \tag{4}$$

由 $0\neq f_{11}=\sum d_{ij}e_{ij}$, 其中 $d_{ij}\in D$, 由定理 1.5.3 知, 至少有一个 $d_{pq}\neq 0$. 令

$$a=d_{pq}^{-1}e_{1p}f_{11}, b=f_{11}e_{q1},$$

则有

$$ab=d_{pq}^{-1}e_{1p}\cdot\sum d_{ij}e_{ij}\cdot e_{q1}=d_{pq}^{-1}d_{pq}e_{11}=e_{11},$$
$$ba=f_{11}(e_{q1}d_{pq}^{-1}e_{1p})f_{11}\in f_{11}Af_{11}=D'f_{11},$$
$$(ba)^2=b(ab)a=be_{11}a=f_{11}e_{q1}e_{11}a=ba.$$

又由 $e_{11}=e_{11}^2=a(ba)b$, 知 $ba\neq 0$, 故 ba 是 $f_{11}Af_{11}$ 中的幂等元. 但因 $f_{11}Af_{11}=D'f_{11}$ 是可除代数,故 $ba=f_{11}$.

令

$$h=\sum_{i=1}^{m}e_{i1}af_{1i},\quad g=\sum_{j=1}^{m}f_{j1}be_{1j}=\sum_{j=1}^{m}f_{j1}e_{qj},$$

则有

$$hg=\sum_{i=1}^{m}e_{i1}af_{1i}f_{i1}be_{1i}=\sum_{i=1}^{m}e_{i1}abe_{1i}=\sum_{i=1}^{m}e_{i1}e_{11}e_{1i}=1.$$

由于 A 是有单位元的有限代数, 由定理 1.3.3 知, 此时也有 $gh=1$,即 $g^{-1}=h$. 但另一方面,直接计算得,

$$gh=\sum_{j=1}^{m}f_{j1}be_{1j}e_{j1}af_{1j}=\sum_{j=1}^{m}f_{jj},$$

故得

$$1=\sum_{j=1}^{m}f_{jj}. \tag{5}$$

比较(4),(5), 得 $m=l$,故 M 和 M' 是同构的. 实际上这个

同构对应可由元素 g 所确定的 A 的内自同构来实现，这是因为有

$$ge_{ij}g^{-1}=ge_{ij}h=\sum_{p,q}f_{p1}be_{1p}e_{ij}e_{q1}af_{1q}=f_{ij}.$$

故有

$$M'=gMg^{-1}.$$

但 D，D' 顺序为 M，M' 在 A 中的中心化子(见定理 1.5.6)，故也有 $D'=gDg^{-1}$. ▎

由这个唯一性定理可知，有限单代数的张量积分解中，其可除代数部分在同构的意义下是唯一确定的. 我们有时称之为单代数的**相应可除代数**.

这样，对有限单代数的研究就归结为对有限可除代数的研究.

习　题

1．证明存在一个二维结合代数，以$\{a,b\}$为基，使 $a^3=0,a^2=b$.

2．证明存在一个以$\{a,b,c\}$为基的三维结合代数，使 $aa=b$，$ab=ba=c$，$bb=ac=ca=bc=cb=cc=0$ 且证明这个代数没有幂等元.

3．令 a,b 是代数 A 的元素，证明 ab 是幂零元当且仅当 ba 是幂零元.

4．令 e 是代数 A 中仅有的幂等元. 设 a 是 A 的非零元素且对 A 中任意元素 x，有 $ax\neq e$，证明 a 是幂零元.

5．证明 N-半单代数的每个单侧理想都有一个幂等生成元.

6．证明 N-半单代数的左理想 L 是极小左理想当且仅当 L 的幂等生成元是本原的.

7．设 A 是交换的有限结合代数，证明 A 的 N-根恰好是 A 的全体幂零元素的集合.

8．设 A 是 N-半单代数，把 A 看作 A-代数左模时，证明代数模 A 的每个子模都是 A 的直和项.

9．设 A 是由域 F 上矩阵 $\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix}$ 组成的代数，其中 M_1,M_2,M_3 是 2×2 矩阵. 找出 A 的 N-根及 A/N 的直和表示.

10．令 A 是特征为素数 p 的域 F 上的 n 维代数，设对 A 的每个元素 x 都有 $x^p=x$，证明 A 是交换的 N-半单代数. 试把 A 分解成单代数的直和. 每个直和项是否同构于 F?

11. 证明 N-半单代数的中心也是 N-半单的。

12. 令$\{e_1,\cdots e_n\}$是代数 A 的一组基，使 $e_ie_j=0$ 若 $i\neq j$。且 $e_ie_i=e_i$，证明 A 是交换的 N-半单代数。

13. 证明一个交换的单代数是一个交换的可除代数。

14. 设 F 是代数闭域，A 是 F 上有限单代数，证明 $A=F_n$。

15. 设 F 是代数闭域，A 是 F 上 N-半单代数，证明 $A=F_{n_1}\oplus\cdots\oplus F_{n_s}$。

16. 证明交换 N-半单代数是域的直和。

第三章　中心单代数

在第二章中，我们看到对半单代数的研究可归结为对单代数的研究，而单代数又可归结为可除代数．在本章中将讨论中心单代数(见下面§1)，实际上讨论的对象是与它相应的可除代数．方法是利用张量积这一工具，把中心可除代数和域F上全矩阵代数联系起来．

在第二章的讨论中，我们并没有把域F上代数A的结构和基础域F本身所具有的特点紧密的联系起来，因而那些结构定理可以看作是代数A的绝对性质．本章中我们将讨论代数A的与基础域F的特性密切有关的一些性质，亦即用借助F的特性的方法来深入探讨代数A的结构．

本章中所涉及的代数都是有限结合代数。

§1　Brauer 群

将称代数A本身在A中的中心化子，亦即子代数$C=\{c\in A \mid cx=xc,\ \forall x\in A\}$，为代数$A$的**中心**．易见，可除代数的中心是一个域．若$A$是$F$上有单位元1的代数，则显然$F\cdot 1$在$A$的中心$C$中。为了方便，常将$F\cdot 1$和$F$等同起来．

定义 3.1.1　设A是F上有单位元1的代数，若A的中心就是$F\cdot 1$，则称A为中心代数．

这样，中心代数是永远有单位元的．

预理 1　(一) 若F上代数$A=B\otimes C$且B，C是有单位元的代数，S是B的一个子代数，则

$$(B\otimes C)^S=B^S\otimes C,$$

其中R^S表示S在R中的中心化子。

(二) A，B，C同(一)．若S是B的子代数且和B有共同单

位元，T是C的子代数且和C有共同单位元，则

$$(B\otimes C)^{S\otimes T}=B^S\otimes C^T.$$

（三） A,B,C同(一)。若B是F上中心代数，则$A^B=C$且A的中心与C的中心重合，即$A^A=C^C$。

证 设$c_1,\cdots,c_t$是C的一个F-基，则$A=B\otimes C$的任一元素a可唯一地表成（定理1.5.3）

$$a=b_1c_1+\cdots+b_tc_t,\ \ b_i\in B. \tag{1}$$

若$a\in A^S$，则$as=sa,\forall s\in S$，因而

$$0=as-sa=\sum_i(b_is-sb_i)c_i,$$

利用表示(1)的唯一性，由之即得

$$b_is=sb_i,\ \ \forall s\in S,\ \ i=1,\cdots,t,$$

故$b_i\in B^S,\forall i$，随之$a\in B^S\otimes C$，即$A^S\subseteq B^S\otimes C$。另一方面，显然有$B^S\otimes C\subseteq A^S$，故得(一)。

证(二)。显然有

$$B^S\otimes C^T\subseteq(B\otimes C)^{S\otimes T}.$$

另一方面，若$d\in(B\otimes C)^{S\otimes T}$，则$d$与$S$中元素可换（这是因为由于这些代数有共同的单位元，故有$S\subseteq S\otimes T$），因而，依(一)有

$$d\in(B\otimes C)^S=B^S\otimes C.$$

但d也与T中元素交换，而B^S和C有共同单位元，再依(一)有

$$d\in(B^S\otimes C)^T=B^S\otimes C^T,$$

即

$$(B\otimes C)^{S\otimes T}\subseteq B^S\otimes C^T,$$

故得(二)。

易见(三)是(一)，(二)的直接推论. ▎

作为预理1的直接推论，有

预理 2 设B,C都是F上中心代数，则$B\otimes C$也是. ▎

预理 3 设B是F上中心单代数而C是F上有单位元的代数，则$B\otimes C$的理想必具形式$B\otimes I$，其中I是C的理想.

证 设J为$B\otimes C$的非零理想. 令$I=J\cap C$. 由定理

1.5.3，可知此时有 $BI=B\otimes I$．显然 $B\otimes I\subseteq J$．

今证 $J=B\otimes I$．为此取 C 的一个 F-基：$c_1,\cdots,c_n$，使得 $c_1,\cdots,c_r$ 组成 I 的 F-基(如果 $I=\{0\}$，则其基取成空集，此时认定 $r=0$)．这时

$$B\otimes I=\{b_1c_1+\cdots+b_rc_r\,|\,b_1\in B,\cdots,b_r\in B\}.$$

若是 $J\neq B\otimes I$，则集

$$M=\{x=b_{r+1}c_{r+1}+\cdots+b_nc_n\,|\,x\in J\} \qquad (2)$$

必含有非零元．在此集中取一元素

$$m=b_{i_1}c_{i_1}+\cdots+b_{i_s}c_{i_s},$$

其中 $b_{i_j}\neq 0$，$r+1\leqslant i_j\leqslant n$，$i_j$ 是彼此不相同的数，且要求项数 s 为有上述性质中的最小可能者．

对任意 $b\in B$，元素

$$bm=bb_{i_1}c_{i_1}+\cdots+bb_{i_s}c_{i_s},$$

$$mb=b_{i_1}bc_{i_1}+\cdots+b_{i_s}bc_{i_s}$$

都在 J 中．注意到项数 s 的性质，知这些表达式中的系数 bb_{i_j} $(b_{i_j}b)$ 或者都不是零或者同时是零．这样，M 中所有形如(2)的元素中的 c_{i_1} 的系数 b_{i_1}，再添上零组成 B 的一个非零理想．由 B 的单性得此理想必等于 B．

由于 B 有单位元，因而得 M 中，亦即 J 中含有元素 $c_{i_1}+b_{i_2}c_{i_2}+\cdots+b_{i_s}c_{i_s}=d$．故对 $\forall b\in B$，J 含有元素

$$bd-db=\sum_{j=2}^{s}(bb_{i_j}-b_{i_j}b)c_{i_j}.$$

由项数 s 的最小性，得 $bb_{i_j}=b_{i_j}b$，再由 B 的中心性，得 $b_{i_j}\in F$，$j=2,\cdots,s$．故 J 含有形如 $c_{i_1}+a_2c_{i_2}+\cdots+a_sc_{i_s}$，$a_j\in F$，的元素．它们显然是属于 C 的，而这和 $c_1,\cdots,c_r$ 组成 $I=C\cap J$ 之基是矛盾的．故有 $J=B\otimes I$．❙

综合这三个预理，便得

定理 3.1.1 设 B，C 是 F 上有限、中心单代数，则 $B\otimes C$ 也是．❙

反过来是显然成立的：若F上代数A，B，C有共同的单位元而$A=B\otimes C$是F上中心单代数，则B，C也是。

定理 3.1.2 设A是F上有限单代数，$A=F_n\otimes D$，D是与A相应的可除代数，则有。

（一）A的中心和D的中心重合，因而A的中心是F的扩域，

（二）若A还是中心代数，则D是F上中心可除代数。

为了证明定理3.1.2，只需指出这个易证事实：F_n是F上的中心单代数。

下面，我们在F上所有中心单代数组成的类中引入一个等价关系。

定义 3.1.2 B，C是F上两个中心单（有限）代数，$B=F_n\otimes D_1$，$C=F_m\otimes D_2$。若$D_1\simeq D_2$，就称B和C是相似的，记作$B\sim C$。

应当指出，这个定义是建立在关于单代数的唯一性定理的基础上。

易知，中心单代数之间的相似关系是一个等价关系。

用$[A]$表F上中心单代数A所在的等价类，并规定

$$[A]\cdot[B]=[A\otimes B]. \tag{3}$$

今证，它是集$G=\{[A]\mid A$取F上的一切中心单代数$\}$上的二元运算。

首先，依定理3.1.1，$A\otimes B$是F上中心单代数．其次，为了说明定义(3)与代表选择无关，设$A_1\sim A_2$，$B_1\sim B_2$，则

$$A_1=F_n\otimes D_1,A_2=F_m\otimes D_1,B_1=F_l\otimes D_2,B_2=F_p\otimes D_2.$$

故有，依定理3.1.1，3.1.2，1.5.4，2.5.2，2.5.3，

$$A_1\otimes B_1=(F_n\otimes F_l)\otimes(D_1\otimes D_2)=F_{nl}\otimes(F_r\otimes D)=F_{nlr}\otimes D,$$

$$A_2\otimes B_2=(F_m\otimes F_p)\otimes(D_1\otimes D_2)=F_{mp}\otimes(F_r\otimes D)=F_{mpr}\otimes D.$$

因而$A_1\otimes B_1\sim A_2\otimes B_2$，即定义(3)与代表选择无关。

由于张量积是有可换律、结合律的，故乘法(3)也有可换律和结合律．易见$[F_n]$对此乘法起单位元的作用。

至此，我们已得$\{G\cdot\}$作成一个有单位元的可换半群。

下面我们进一步证明$\{G,\cdot\}$作成一个可换群.

预理 4 设D,C是F上代数A的两个子代数，D,C有共同的单位元，D与C的元素之间乘法可换，若D还是F上中心可除代数，则$DC=D\otimes C$.

证 由D,C有共同的单位元，故DC可看作是除环D上的左向量空间. 设$c_1,\cdots,c_n$为C的一个F-基，则DC中任意元素可表为$d_1c_1+\cdots+d_nc_n$, $d_i\in D$, 即$c_1,\cdots,c_n$是D上左向量空间DC的一组生成元，适当编号，不妨认定$c_1,\cdots,c_r$是DC在D上的一个基. 若$n=r$，即有

$$d_1c_1+\cdots+d_nc_n=0\Longleftrightarrow d_1=0,\cdots,d_n=0,$$

则由定理 1.5.3，便得$DC=D\otimes C$.

若$n>r$，则有$c_{r+1}=d_1c_1+\cdots+d_rc_r$. 但已知$D$与$C$的元素间乘法可换，故$dc_{r+1}-c_{r+1}d=0$，即有

$$(dd_1-d_1d)c_1+\cdots+(dd_r-d_rd)c_r=0.$$

因而$dd_i-d_id=0$，即d_i在D的中心中，但D是中心代数，故$d_i\in F$, $i=1,\cdots,r$. 这样$c_{r+1},c_1,\cdots,c_r$在F上线性相关，这与$c_i,i=1,\cdots,n$, 的选择矛盾. 故$n>r$是不可能的. ❙

与代数A反同构的代数，记作A^{-1}. 对任何代数A，代数A^{-1}是存在的. 为此只需在A中用新的乘法运算$\circ$: $a\circ b=ba$来替代原有乘法便得A^{-1}. 对于有反自同构的代数A，将有$A\simeq A^{-1}$. 例如，$F_n\simeq F_n^{-1}$.

预理 5 设D是F上中心可除代数，则$D\otimes D^{-1}$是全矩阵代数.

证 设$(D:F)=n$. 令

$$R_D=\{R_d\mid d\in D\},\quad L_D=\{L_d\mid d\in D\}.$$

由于D有单位元，依定理 1.3.2，$D\simeq R_D$, $D^{-1}\simeq L_D$ 选定D的一个F-基后，R_D,L_D可看作是F_n的两个子代数. F_n,R_D,L_D有共同的单位元，而$R_dL_{d'}=L_{d'}R_d,\forall d,d'\in D$. 又由$D$是$F$上中心可除代数，因而$R_D,L_D$也是，这样依预理 4 得

$$R_DL_D=R_D\otimes L_D\simeq D\otimes D^{-1}.$$

此时还有$(R_DL_D:F)=(R_D:F)(L_D:F)=n^2$。这样子代数 R_DL_D 与 F_n 的维数相同，故 $F_n=R_DL_D\simeq D\otimes D^{-1}$。 |

定理 3.1.3 设A是F上中心单代数，则 $A\otimes A^{-1}$ 是F上全矩阵代数.

证 设$A=F_n\otimes D$，由A的中心性易得可除代数D的中心性。由预理 5，$D\otimes D^{-1}=F_m$。

设A到 A^{-1} 的反同构对应为φ，则A是其子代数 F_n，D的张量积的一切条件，经φ变成 A^{-1} 是其子代数 $F_n\varphi$，$D\varphi$ 的张量积的一切条件。但$F_n\varphi=F_n^{-1}=F_n$，$D\varphi=D^{-1}$，故得$A^{-1}=F_n\otimes D^{-1}$。这样

$$A\otimes A^{-1}=F_n\otimes D\otimes F_n\otimes D^{-1}=F_{n^2}\otimes(D\otimes D^{-1})=F_{mn^2}. \quad |$$

这样对任意$[A]\in G$，$[A]\cdot[A^{-1}]=[F_m]$。

总结以上便得

定理 3.1.4 设$G=\{[A]|A$取遍F上一切中心单代数$\}$。定义$[A]\cdot[B]=[A\otimes B]$，则$\{G,\cdot\}$，作成一个 Abel 群，称为域F上的 Brauer 群。

进一步讨论(见§8)还可以证明 Brauer 群$\{G,\cdot\}$的每一个元素都是有限阶的，这等于说，对F上任意一个中心可除代数D，都有一个相应的正整数 n，使得 n 个D的张量积：$D\otimes\cdots\otimes D$(共 n 个)是一个全矩阵代数。这样 Brauer 群使我们对中心单代数，实质上是对中心可除代数，从全体上有一个初步的了解。

§ 2 中心单代数的纯量扩张

设A是域F上有限代数，K是域F的有限扩域。考察它们的张量积 $A\otimes_F K$，这里的F是要特别标明，A，K是作为F上代数来作张量积的。易见$A\otimes K$可看作是域K上的向量空间。若 a_1，$\cdots$，a_n 是代数A的 F-基而相应的乘法表是：

$$a_ia_j=\sum_k \alpha_{ij}^k a_k,\ \ \alpha_{ij}^k\in F, \tag{1}$$

则依定理 1.5.3，$A\otimes K$ 中任意元素都可唯一地表成 $\sum_i \beta_i a_i$，$\beta_i\in K$。用 1 表域 K 的单位元，则 $1\,a_i$，$i=1,\cdots,n$，组成 K 上向量空间 $A\otimes K$ 的一个基，而其乘法表为

$$(1\,a_i)(1\,a_j)=\sum_k \alpha_{ij}^k(1\,a_k).$$

因而，如果把 $1\,a_i$ 和 a_i 等同起来的话，这时 $A\otimes K$ 的元素可唯一地表成 $\sum_r \beta_i a_i$，$a_i\in A\otimes K$，$\beta_i\in K$，且和 A 有相同的乘法表(1)。

故可这样粗略地说，当把 $A\otimes K$ 看作是域 K 上代数时，它和 F 上代数 A 的差别就在于基础域由 F 扩大到 K，而基本的运算表完全把 A 的继承下来了。

定义 3.2.1 A 是 F 上有限代数，K 是 F 的有限扩域。把域 K 上代数 $A\otimes K$ 称之为 F 上代数 A 的纯量扩张。有时简记为 A_K。

命题 1 $(A\otimes_F B)\otimes_F K=(A\otimes_F K)\otimes_K(B\otimes_F K)$(或简写成)$(A\otimes_F B)_K=A_K\otimes_K B_K$)，其中 K 是 F 的扩域。

证 设 $a_1,\cdots,a_n$；$b_1,\cdots,b_m$ 顺序为 F 上代数 A,B 的 F-基，乘法表为

$$a_i a_j=\sum_h \alpha_{ij}^h a_h,\qquad b_s b_t=\sum_k \beta_{st}^k b_k,\tag{2}$$

其中 α_{ij}^h，β_{st}^k 都在 F 中。则由定义及上面的讨论得知，K 上代数 $(A\otimes_F B)_K$ 是以 $a_i b_s$ 为 K-基，其乘法表为

$$(a_i b_s)(a_j b_t)=\sum_{h,k}\alpha_{ij}^h\beta_{st}^k(a_h b_k).\tag{3}$$

另一方面，K 上代数 A_K，B_K 以 $a_1,\cdots,a_n$；$b_1,\cdots b_m$ 为其 K-基且顺序和 A,B 有相同的乘法表，因而 $A_K\otimes_K B_K$ 也是以 $a_i b_s$ 为 K-基，以(3)为乘法表，故得命题 1．|

注意到 $A\otimes_F K$ 可看成是以 F-代数的基为基的域 K 上的代数，可得下面的

命题 2 若 A 是 F 上代数，而三个域有包含关系 $F\subseteq P\subseteq K$，则有 $(A\otimes_F P)\otimes_P K=A\otimes_F K$ 或简记作 $(A_P)_K=A_K$. ∎

虽然 F 上代数 A 和 K 上代数 A_K 可以有相同的基和相同的乘法表，然而在结构上是可能区别很大的.

先看一个简单的例子：可除代数的纯量扩张不是可除代数了.

设 D 是 F 上可除代数 $(D:F)=n>1$. 任取 $a\in D, a\notin F$，则 a 在 F 上的最小多项式 $P(x)$ 之次数 $t>1$. 设 K 是 $F(\alpha)$，而 α 为 $P(x)$ 的一个根. 这样，在 K 上有

$$P(x)=(x-\alpha)(x^{t-1}+\beta_{t-2}x^{t-2}+\cdots+\beta_0),\quad \beta_i\in K \qquad (4)$$

今考察 D_K，$a\in D\subseteq D_K$，由(4)得

$$0=P(a)=(a-\alpha)(a^{t-1}+\beta_{t-2}a^{t-2}+\cdots+\beta_0).$$

由于 a 在 F 上的最小多项式的次数为 t，因而 $a^{t-1}, a^{t-2}, \cdots, 1$ 在 F 上是线性无关的，因而它们看作是 D_K 中的元素时，在 K 上也是线性无关的. 因此

$$a-\alpha\neq 0,\quad a^{t-1}+\beta_{t-2}a^{t-2}+\cdots+\beta_0\neq 0,$$

即得 D_K 有零因子，当然 D_K 不能是可除代数了.

但是有一些代数性质，经过纯量扩张后是可保留下来的. 最简单的有 $F_n\otimes K=K_n$，即 F 上全矩阵代数经纯量扩张仍是全矩阵代数，当然已是域 K 上的了. 下面来证明中心单性是经纯量扩张不变的.

定理 3.2.1 A 是 F 上中心单代数 $\Longleftrightarrow A_K$ 是 K 上中心单代数，其中 K 为 F 的任意有限扩域.

证 设 A 是 F 上中心单代数. 由定理 3.1.3，$A\otimes A^{-1}=F_n$. 依命题 1，有

$$K_n=F_n\otimes_F K=(A\otimes_F A^{-1})\otimes_F K=A_K\otimes_K A_K{}^{-1}.$$

但 K_n 是全矩阵代数，当然也是 K 上中心单代数. 依定理 3.1.1 下面的说明，知 A_K 是 K 上中心单代数. 另一面的结论是显然的. ∎

定理 3.1.3 指出，对于中心可除代数 D，$D\otimes D^{-1}$ 是全矩阵

代数，它用张量积的方法，把中心可除代数和全矩阵代数连系起来了。本节的下面这个主要结果，则是从另一角度，用同样的方法，把同样的对象连系起来。先证

预理 1 F 上代数 A 有单位元$\Longleftrightarrow A_K$ 有单位元，K 是 F 的任意有限扩域。

证 “$\Rightarrow$”是显然的。

“$\Leftarrow$”。取 A 的一个 F-基 $a_1,\cdots,a_n$，相应的乘法表为：

$$a_ia_j=\sum \alpha_{ij}^k a_k,\ \alpha_{ij}^k\in F, \tag{5}$$

则 $a_1,\cdots,a_n$ 也是 A_K 的一个 K-基，其乘法表也是(5)。

若 A_K 的单位元 $1=\sum\beta_ia_i$，$\beta_i\in K$。由

$$1\cdot a_j=\sum_i \beta_ia_ia_j=\sum_{i,k}\beta_i\alpha_{ij}^k a_k, \tag{6}$$

$$a_j\cdot 1=\sum_i \beta_ia_ja_i=\sum_{i,k}\beta_i\alpha_{ji}^k a_k \tag{7}$$

及 $1\cdot a_j=a_j\cdot 1=a_j$，得

$$\left.\begin{aligned}\sum_i\beta_i\alpha_{ij}^k&=\delta_{jk},\\ \sum_i\beta_i\alpha_{ji}^k&=\delta_{hi},\end{aligned}\right\}\quad j,k=1,\cdots,n。 \tag{8}$$

若把 β_i 看作未知数，这是由 $2n^2$ 个方程组成的 F 上的线性方程组。它在扩域 K 中有解，依线性方程组理论，它在域 F 中亦必有解。故存在 $\alpha_i\in F$，用 α_i 代替 β_i 满足(8)，因而 $\sum\alpha_ia_i\in A$ 是 A 的单位元。 ▮

定理 3.2.2 A 是 F 上中心单代数$\Longleftrightarrow$存在 F 的一个有限扩域 K，A_K 是 K 上全矩阵代数。

证 “$\Leftarrow$”。设 A_K 是 K 上全矩阵代数，则依预理 1，A 有单位元。若 C 是 A 的中心，则 $F\subseteq C$。今证 $C=F$。显然 C_K 包含在 A_K的中心中，但A_K的中心是 K，故$(C_K:K)\leqslant(K:K)=1$。另一方面$(C_K:K)=(C:F)\geqslant 1$，故$(C_K:K)=(C:F)=1$，即 $C=F$。故

A 是中心代数。

其次，若 I 是 A 的非零理想，则 I_K 是 A_K 的非零理想. 由 A_K 是 K 上单代数，得 $I_K=A_K$，这样便有

$$(I:F)=(I_K:K)=(A_K:K)=(A:F),$$

即 $A=I$，故 A 是单代数.

"$\Rightarrow$". 设 A 是 F 上中心单代数. 若 $(A:F)=1$，则 $(A_K:K)=1$，$A_K=K$ 是 K 上中心单代数. 今对维数 $(A:F)$ 作归纳法来证明. 设 $A=F_n\otimes D$，D 是中心可除代数. 若 $A\neq D$，则 $(D:F)<(A:F)$. 依归纳法假设，存在 F 的有限扩域 K，使 $D_K=K_m$ 是 K 上全矩阵代数. 这时便有，依命题 1，

$$A_K=(F_n)_K\otimes_K(D_K)=K_n\otimes_K K_m=K_{nm}.$$

若 $A=D$，则由上面的例子所示，存在 F 的有限扩域 P，使 D_P 不是 P 上可除代数. 但 D_P，依定理 3.2.1，仍为中心单代数，故有 $A_P=D_P=P_n\otimes_P D'$，而 $(D':P)<(D_P:P)=(A_P:P)=(A:F)$. 再由归纳法假设，必存在 P 的有限扩域 K，$(D')_K$ 是 K 上全矩阵代数. 这样，利用命题 1,2，$A_K=(A_P)_K=(P_n\otimes_K D')_K=K_n\otimes_K(D')_K$ 也是 K 上全矩阵代数. ▎

由上定理直接得到

定理 3.2.3 设 A 是 F 上中心单代数，则 $(A:F)=n^2$，n 是正整数. ▎

§3 分离代数

上一节中我们看到中心可除代数一定有一个纯量扩张是全矩阵代数. 对于不是中心的可除代数如何呢？F 上可除代数 D 的中心 C 是一个 F 上的有限扩域. 在考察可除代数之前，先看一下 F 上有限扩域 C 的情况.

设 C 是域 F 上非分离有限扩域. 此时 F 的特征 $p\neq 0$. 设 $a\in C$ 是非分离元，则 a 的最小多项式必具形状

$$\varphi(x)=(x^p)^r+\beta_1(x^p)^{r-1}+\cdots+\beta_r.$$

设 $K=F(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$，其中 α_i 是 $x^p=\beta_i$ 的一个根．

现来考察 C_K．在 C_K 中有

$$0=\varphi(a)=(a^r+\alpha_1 a^{r-1}+\cdots+\alpha_r)^p.$$

由于 $a^r,\cdots,1$ 在 F 上是线性无关的，故，作为 C_K 中元素，它们在 K 上也是线性无关的．因而

$$0\neq b=a^r+\alpha_1 a^{r-1}+\cdots+\alpha_r\in C_K$$

是幂零元．可换代数 C_K 有非零的幂零元，因而其 N-根不为零，即 C_K 不是半单代数．

这样便有，可除代数的纯量扩张甚至可能不是半单代数．因而我们需要下面的概念．

定义 3.3.1 F 上半单代数 A 叫作分离代数，如果对于任意有限扩域，A_K 是 K 上的半单代数．

为了刻划分离代数，我们需要下面的

命题 1 若 C 是域 F 的有限分离扩域，则其任意纯量扩张 C_K 必是半单的，即 C 是 F 上分离代数．

证 C 是 F 上有限分离扩域，故 $C=F(\xi)$，其中 ξ 在 F 上的最小多项式 $\varphi(x)$ 是分离多项式．

设 P 是 $\varphi(x)$ 的完全分解域，则在 $P[x]$ 中有

$$\varphi(x)=(x-\xi_1)\cdots(x-\xi_t),\ \xi_i\in P.$$

设

$$\varphi_i(x)=\varphi(x)/(x-\xi_i)\in P[x],\ i=1,\cdots,t.$$

由于它们的最大公因式是 1，故存在 $\psi_i(x)\in P[x]$，使得

$$\varphi_1(x)\psi_1(x)+\cdots+\varphi_t(x)\psi_t(x)=1. \qquad (1)$$

今考察 C_P．C_P 是可换代数．在 C_P 中，由于 $\varphi(\xi)=0$，故 $\varphi_i(\xi)\varphi_j(\xi)=0, i\neq j$．设 $e_i=\varphi_i(\xi)\psi_i(\xi)\in C_P$，则由(1)有

$$e_1+\cdots+e_t=1 \text{ 且 } e_ie_j=\delta_{ij}e_i.$$

注意到 $t=(C:F)=(C_P:P)$，便得

$$C_P=e_1P\oplus\cdots\oplus e_tP,\ 而\ e_iP\simeq P,$$

即 C_P 是 P 上单代数的直和，即是半单的．

易见对 P 的任意扩域 K，有

$$C_K = e_1K \oplus \cdots \oplus e_tK$$

是K上半单代数.

设Q是F的任意有限扩域. 取P, Q的一个合成域K,则由上讨论知C_K是K上半单的. 此时必有C_Q也是半单的,否则$(C_Q)_K = C_K$将不是半单的了,这与刚得到的结果矛盾. 这样就得到对任意Q,C_Q都是半单的. ∎

定理 3.3.1 F上单代数A是分离代数$\Longleftrightarrow$单代数A的中心是F的分离扩域.

证 "⇒". 由定理 3.1.2 知单代数A的中心是域. 若A的中心C是F的非分离扩域,则由上面的讨论,C的某个纯量扩张C_K含有非零的幂零元c. 但C_K中的每个元素与A_K中的每个元素是乘法可换,因而幂零元c在A_K生成的理想是幂零的,这和A是分离代数,因而A_K是半单的相矛盾,故C必是F的分离扩域.

"⇐". 已知单代数A的中心C是F的分离扩域,$(C:F)=t$. 由命题 1 知,若取P是包含C的、F的最小正规扩域,则A的单位元 1 在C_P中可分解成t个两两正交的幂等元的和

$$1 = e_1 + \cdots + e_t. \tag{2}$$

今证A_P是P上中心单代数的直和.

利用(2),注意到e_i在A_P的中心C_P中,便得

$$A_P = B_1 \oplus \cdots \oplus B_t, \quad B_\mu = A_P \cdot e_\mu. \tag{3}$$

下面来证明每一B_μ都是P上中心单代数.

为此把A看作其中心C上的代数. 这时A是C上的中心单代数. 设$a_1, \cdots, a_n$为A在C上的一个基, 其乘法表为

$$a_i a_j = \sum_k \alpha_{ij}^k a_k, \quad \alpha_{ij}^k \in C, \tag{4}$$

则,作为C上中心单代数A的纯量扩张,$A \otimes_C P$是P上的中心单代数,且以$a_1 \cdots, a_n$为基,以(4)为乘法表.

由$(A_P:P) = (A:F) = (A:C)(C:F) = n \cdot t$以及(3),易见$n \cdot t$个元素$a_i e_\mu, i=1, \cdots, n, \mu = 1, \cdots, t$,是$P$上向量空间$A_P$的一

组生成元，因而是 A_P 的一个 P-基，并且 $a_ie_\mu, i=1,\cdots,n$，恰组成 B_μ 在 P 上的一个基. P 上代数 B_μ 关于此基的乘法表是

$$(a_ie_\mu)(a_je_\mu)=(a_ia_j)(e_\mu e_\mu)=\sum_k \alpha_{ij}^k(a_ke_\mu),$$

即和乘法表(4)一样. 即得 P 上代数 B_μ 与 P 上中心单代数 $A\otimes_C P$ 是同构的，因而每一 B_μ 都是 P 上中心单代数.

设 K 为 F 的任意有限扩域，取 Ω 为 P 和 K 的 合成域，依§2 中命题 1,2，则由

$$(A_K)_\Omega=(A_P)_\Omega=(B_1)_\Omega\oplus\cdots\oplus(B_t)_\Omega$$

以及 $(B_\mu)_\Omega$，作为 P 上中心单代数的纯量扩张，是 Ω 上的中心单代数，便得 $(A_K)_\Omega$ 是 Ω 上半单代数，因而 A_K 也是 K 上半单代数. ❙

由上定理不难推得

定理 3.3.2 设 F 上半单代数 $A=\sum\oplus A_i$，A_i 是单代数. 则 A 是分离代数当且仅当每一单代数 A_i 的中心 C_i 是 F 的 分 离 扩域. ❙

注意到特征为零的域 F 的任意有限扩域都是分离扩域，我们有

定理 3.3.3 特征为零的域 F 上的任意半单代数都是分离代数. ❙

定理 3.3.4 F 上半单代数 A 是分离的 $\Longleftrightarrow$ 存在 F 的一个有限扩域 P 使 A_P 是 P 上全矩阵代数的直和.

证 "$\Rightarrow$". 在定理 3.3.1 的证明中，我们看到，若 A 是分离代数，则存在一有限扩域 P，使 A_P 是 P 上中心单代数的直和. 但每一 P 上中心单代数 B 都有一纯量扩张 B_K 是 K 上全矩阵代数，其中 K 是 P 的有限扩域. 取这些 K 的一 个合 成域 Ω，便得 A_Ω 是 Ω 上全矩阵代数的直和.

"$\Leftarrow$". 请读者去证. ❙

上定理中出现一个有用的概念，把它写成下面的

定义 3.3.2 域 F 的一个扩域 K 叫做 F 上代数 A 的一个分裂

域，若 A_K 是 K 上全矩阵代数的直和．

§4 中心单代数的自同构、单子代数

在本节中证明关于中心单代数的两个定理．一个是说它的自同构必是内自同构．和群的内自同构概念类似的，有单位元的代数 A 的一个自同构 φ 叫作内自同构，如果存在 A 中可逆元 a，使得 $x\varphi=a^{-1}xa$，$\forall x\in A$．在线性代数中我们知道域 F 上全矩阵代数 F_n 的自同构都是内自同构，上述结果是这个定理的一个推广．另一个是说中心单代数的单子代数在一定意义下是成对出现的．这些定理本身就很重要，并有广泛应用．另外，在下面构造一种特殊类型的中心单代数时，它们又是必不可少的．

先证下面的

预理 1 设 A 是 F 上单代数，其单位元是 1，F 上有限维向量空间 $V\neq0$ 是 A 上代数模且 $x\cdot1=x$，$\forall x\in V$，则 V 是有限个既约 A-模的直和，并且 V 的每一个既约子模都与 A 的任一极小右理想（看成 A 的代数模）同构．随之，单代数 A 的极小右理想作为 A-模是彼此同构的．

证　取 V 的一个既约子模 V_0（由 V 是 F 上有限维空间知这样的既约子模是存在的）以及 A 的一个极小右理想 R．

若 $V_0R=0$，则 V_0 的零化子 $B=\{a\in A\mid V_0a=0\}$ 包含 R，因而不为零．易见 B 是 A 的理想，由 A 的单性知 $A=B$，从而 $V_0A=0$，这与假设 $x\cdot1=x$，$\forall x\in V$ 相矛盾，故 $V_0R\neq0$．因而存在 $x_0\in V_0$，使 $x_0R\neq0$．显然 x_0R 是子模，由 V_0 的既约性得 $V_0=x_0R$．直接验证知对应

$$\varphi:\ R\to V_0=x_0R$$
$$r\mapsto x_0r$$

是代数模 R 到 V_0 上的同态对应．由 R 的极小性知 φ 是同构对应，即既约模 $V_0\simeq R$．由之便得单代数 A 的所有极小右理想看作 A 的代数模是彼此同构的．

另一方面，由于 $A=D\otimes F_n$，若令 e_{ii} 为矩阵单位，$A_i=e_{ii}A$，则 A_i 是 A 的极小右理想且

$$A=A_1+A_2+\cdots+A_n. \tag{1}$$

代数模 V 是有有限生成元组的，令 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是 V 的一组生成元：

$$V=x_1A+\cdots+x_mA,$$

则由(1) 得

$$V=x_1A_1+\cdots+x_1A_n+x_2A_1+\cdots+x_2A_n+\cdots+x_mA_n.$$

这里每一 x_iA_j 或等于零或是与 A_j 同构的既约模. 在此和中去掉一切可去的被加项，假定剩下来的既约模是 $V_1,\cdots,V_s$，则易见

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_s \text{（代数模的直和）}. \quad \blacksquare$$

定理 3.4.1(Noether-Skolem 定理) 设 A 是 F 上中心单代数，B 和 B' 是 A 的两个单子代数且 A,B 和 B' 有共同的单位元 1，则 F 上代数 B 与 B' 间的任意同构对应可以扩充成代数 A 的一个内自同构.

证 设 F 上有限维空间 A 的所有线性变换作成的代数为 T，则

$$T=L_AR_A=L_A\otimes R_A,$$

其中 $L_A(R_A)$是利用 A 中元素作左(右)乘所组成的 T的子代数. 令 R_B 表示用 B 的元素作右乘的全体，则显然$R_B\subseteq R_A$ 且 $L_AR_B=L_A\otimes R_B$. 令

$$C=L_A\otimes R_B,$$

则知 C 是 F 上单代数. F 上向量空间 A 可看作是 C上代数模. 由于 A,B 有共同单位元，故 C 的单位元是空间 A 的恒等变换，这样依预理 1，C 上代数模 A 是有限个既约模 A_i 的直和：

$$A=A_1+\cdots+A_m. \tag{2}$$

同样，令 $C'=L_AR_{B'}=L_A\otimes R_{B'}$，则 C' 上代数模 A 也是有限个 C' 上既约模 A'_i 的直和：

$$A=A'_1+\cdots+A'_n. \tag{3}$$

设给定的同构对应为

$$\Psi: B\to B'$$
$$b\mapsto b'.$$
另一方面，$b\mapsto R_b(b'\mapsto R_{b'})$给出$B(B')$和$R_B(R_{B'})$间的同构对应，故$R_b\mapsto R_{b'}$给出$R_B$到$R_{B'}$上的同构对应．随之
$$\alpha=\sum L_{a_i}R_{b_i}\mapsto\sum L_{a_i}R_{b_i'}=\alpha' \tag{4}$$
就给出代数$L_A\otimes R_B$到$L_A\otimes R_{B'}$上，也就是C到C'上的同构对应．依预理1，(2)中的A_i和C的极小右理想作为C上代数模是同构的，(3)中的A_i'和C'的极小右理想作为C'上代数模是同构的，随之，在A_i和A_i'之间有一个一一对应$x_i\mapsto x_i'$，使得
$$x_i+y_i\mapsto x_i'+y_i',$$
$$x_i\alpha\mapsto x_i'\alpha'$$
不妨设$m\leqslant n$．这样在$A=A_1+\cdots+A_m$和$A_1'+\cdots+A_m'$之间(也就是A到A内)就有一个一一对应
$$\varphi: A\to A$$
$$x=x_1+\cdots+x_m\mapsto x_1'+\cdots+x_m'=x',$$
满足
$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),$$
$$\varphi(x\alpha)=\varphi(x)\alpha'. \tag{5}$$
取$\alpha=L_aR_1, a\in A$，则$\alpha=\alpha'$，故有
$$\varphi(ax)=\varphi(x\alpha)=\varphi(x)\alpha'=\varphi(x)\alpha=a\varphi(x),$$
即是
$$\varphi(ax)=a\varphi(x),\ \forall a\in A. \tag{6}$$
令$x=1$，$\varphi(1)=c\in A$，得$\varphi(a)=ac$．由于φ是一一对应，故对任意$a\in A$，若$ac=0$，则必$a=0$，即c不是A的右零因子．注意到A是有限维代数，故c必有左逆元，随之c是可逆元．

在(5)中取$\alpha=L_1R_b, b\in B$，则有
$$\varphi(xb)=\varphi(x)b'. \tag{7}$$
由(6)，(7)便得
$$bc=b\varphi(1)=\varphi(b\cdot 1)=\varphi(1\cdot b)=\varphi(1)b'=cb',$$
即
$$c^{-1}bc=b'.$$

这样，给定的代数 B 到 B' 上的同构对应 $b\mapsto b'$ 就扩充为元素 c 所确定的代数 A 的内自同构。 |

这个定理先是对域 F 上全矩阵代数 F_n 证的，现在对域 F 上中心有限维可除代数 D 上的全矩阵代数 D_n（看作 F 上代数）也已证明。实际上对证明稍加修改，特别是关于 c 是可逆元的证明，可以去掉 D 在 F 上的维数是有限的限制，我们把它留给读者去作。Noether-Skolem 定理有很多应用，从下面讨论中心单代数的单子代数中也可看到它是一个有力结果。

预理 2 设 A 是 F 上 n 维有单位元的代数，把 A 看成 F_n 的子代数，则 $F_n^A\simeq A^{-1}$。

证 把 F_n, A, A^{-1} 顺序看成是 F 上 n 维向量空间 A 上的线性变换代数 T, R_A, L_A。欲证定理只需证明：$T^{R_A}=L_A$。

我们知道 $L_A\subseteq T^{R_A}$。另一方面，设 $\alpha\in T$ 为与一切 R_a, $a\in A$ 交换者，则有

$$x(\alpha R_a)=x(R_a\alpha),$$

即
$$(x\alpha)a=(xa)\alpha,\ \forall x,a\in A.$$

取 $x=1$, 令 $c=1\alpha\in A$, 得 $ca=a\alpha$, $\forall a\in A$, 即 $\alpha=L_c\in L_A$, 故得 $T^{R_A}=L_A$。 |

定理 3.4.2 设 A 是域 F 上中心单代数，B 是 A 的一个 n 维单子代数且与 A 有共同单位元，则有

(一) A^B 是单子代数，与 A 有共同单位元，

(二) $A^{(A^B)}=B$,

(三) $(A:F)=(B:F)(A^B:F)$,

(四) $A^B\otimes F_n\simeq A\otimes B^{-1}$.

证 先证(四)。令 $C=A\otimes F_n$，依定理 3.1.1 知，它是一个 F 上中心单代数。由于 n 维代数 B 可同构地嵌入 F_n，即与 F_n 的一个子代数 B_0 同构，这样便有

$$C\supseteq A\supseteq B\simeq B_0\subseteq F_n\subseteq C,$$

即 C 中有两个彼此同构的单子代数 B 和 B_0。由上面定理得必有代数 C 的内自同构 φ，使 $B\varphi=B_0$。随之也有 $(A\otimes F_n)^B\varphi=$

$(A\otimes F_n)^{B_0}$. 由§1预理1，有

$$(A\otimes F_n)^B=A^B\otimes F_n,$$

$$(A\otimes F_n)^{B_0}=A\otimes F_n{}^{B_0}=A\otimes B_0{}^{-1}\simeq A\otimes B^{-1},$$

故$(A^B\otimes F_n)\varphi=A\otimes B_0{}^{-1}$,即得(四).

证(一). 作为中心单代数与单代数的张量积，$A\otimes B^{-1}$是单代数，再由刚证的(四)便知$A^B\otimes F_n$是单代数，因而A^B是单代数. 显然它含A中单位元.

证(二). 由§1预理1，有

$$(A\otimes F_n)^{A^B\otimes F_n}=A^{(A^B)}\otimes F=A^{(A^B)},$$

$$(A\otimes F_n)^{A\otimes B_0^{-1}}=F\otimes F_n^{B_0^{-1}}=B_0.$$

注意到φ是$A\otimes F_n$的自同构且$(A^B\otimes F_n)\varphi=A\otimes B_0{}^{-1}$,故有

$$A^{(A^B)}\varphi=B_0.$$

另一方面

$$B\varphi=B_0,$$

故有$A^{(A^B)}=B$.

证(三). 由(四)得$(A^B:F)n^2=(A:F)n$,故

$$(A:F)=(A^B:F)n=(A^B:F)(B:F). \ \blacksquare$$

上定理说明，中心单代数A内与A有共同单位元的单子代数成对出现：有一个B,就有一个C,此处$C=A^B$,$B=A^C$且$(A:F)=(B:F)(C:F)$. 这个定理常称为双中心化子定理. 在下面将利用它进一步找到中心单代数的有“好”性质的分裂域.

§5 中心单代数的分裂域

在§2中我们已看到，中心单代数都有分裂域. 在本节中将要证明，对F上中心单代数A必有F上的正规扩域N作为它的分裂域. 为此，当然只需考虑F上中心可除代数D就够了.

设D是F上中心可除代数，K是F上n次扩域. 显然$D\otimes F_n$含有与F上代数K同构的子域. 这样就有最小正整数r，能使$A=D\otimes F_r$含有与K同构的子域.

定理 3.5.1 设 D 是 F 上中心可除代数，K 是 F 上有限扩域而 r 是最小正整数，能使 $A=D\otimes F_r$ 含有与 F 上代数 K 同构的子域，则下列各命题是等价的：

(一) K 是 D 的分裂域.

(二) K 是 A 的极大子域(即 K 不被 A 的更大子域所包含)。

(三) $A^K=K$。

证 在下面的讨论所涉及的代数都有共同单位元，将不每次重复了.

首先证明，A^K 是一个可除代数.

由于 D,F_r 都是中心单代数，故其张量积 A 也是。但 K 是 A 的单子代数，依定理 3.4.2，A^K 是单代数，随之 $A^K=D_1\otimes F_t$。若 A^K 不是可除代数，则 $t>1$，今证这是不可能的.

由定理 1.5.5，$A=F_t\otimes A^{F_t}$。再依定理 3.4.2，A^{F_t} 是单代数，随之 $A^{F_t}=D_2\otimes F_s$。这样

$$A=F_t\otimes A^{F_t}=F_t\otimes D_2\otimes F_s=D_2\otimes F_{st}.$$

由关于单代数的唯一性定理知 $D\simeq D_2, r=st$。随之

$$s=\frac{r}{t}<r.$$

另一方面，K 与 F_t 元素间交换，故

$$K\subseteq A^{F_t}=D\otimes F_s,$$

这与 r 的最小性是矛盾的. 故 A^K 是可除代数.

现在来证(一)$\Longleftrightarrow$(三). 由定理 3.4.2，注意到 K 是域，有

$$A^K\otimes F_n\simeq A\otimes K=(D\otimes K)\otimes F_r=(D'\otimes F_m)\otimes F_r,$$

其中 D' 是可除代数. 由于 A^K 是可除代数，再由唯一性定理 $A^K\simeq D'$，因而

$$D\otimes K=A^K\otimes F_m. \tag{1}$$

式(1)说明，若 $A^K=K$，则 K 是 D 的分裂域；反之，若 K 是 D 的分裂域，则 $A^K\simeq K$. 但 $K\subseteq A^K$ 且都是 F 上有限维代数，故 $A^K=K$。

最后证(二)$\Longleftrightarrow$(三).

若 $A^K \neq K$,则由于 $A^K \supseteq K$,必有 $\alpha \in A^K \setminus K$. $K[\alpha] \subseteq A^K$,因而 $K[\alpha]$无零因子,另一方面它显然是 F 上有限维交换代数,故得 $K[\alpha]$是子域,因而 K 不是 A 的极大子域.

反之,若 K 不是极大子域,则有域 K',使

$$K \subset K' \subset A,$$

因而 $A^K \supseteq K'$,随之 $A^K \neq K$. ∎

作为定理 1 的推论我们有下面关于可除代数的结果.

定理 3.5.2 设 D 是域 F 上中心可除代数,则

(一) D 的每一极大子域都是 D 的分裂域. 随之,有限维可除代数 D 含有自己的分裂域.

(二) 对于 D 的每一极大子域 K,有$(D:F)=(K:F)^2$.

(三) 若 N 是 D 的一个分裂域,则$\sqrt{(D:F)}$整除$(N:F)$.

证 (一)是定理 1 中 $r=1$ 的情形.

证(二). 设 K 是可除代数 D 的极大子域,当然 K 是单子代数,由定理 3.4.2,知

$$(D:F)=(K:F)(D^K:F),$$

但 $D^K=K$,故$(D:F)=(K:F)^2$.

证(三). 根据定理 1 前面的讨论以及定理 1,知 N 必是某一中心单代数

$$A=D\otimes F_r$$

的极大子域且 $N=A^N$. 故有

$$(A:F)=(N:F)(A^N:F)=(N:F)^2=(D:F)r^2,$$

$$(N:F)=\sqrt{(D:F)}\cdot r,$$

故得(三). ∎

我们虽然已经知道中心单代数 A 都有分裂域,但仍需进一步探讨,它是否有性质"好"的分裂域. 这对进一步探讨中心单代数的构造是重要的. 利用上面结果去证,A 一定有分裂域 K 而 K 是 F 上的正规扩域. 先证下面这个属于 Noether 的结果.

定理 3.5.3 设 D 是 F 上中心可除代数且 $D\neq F$,则 D 含

有子域 $K\supset F$，它是 F 上的分离扩张。

证　任取 $u\in D\setminus F$，则易见 $F[u]$是 D 的子域且 $F[u]\supset F$. 由于特征为零的域或者有限域上的有限扩域都是分离的，故可假定 F 的特征 $p\neq 0$ 且是无限域。

假定定理不成立，则对任意 $u\in D\setminus F$，$F[u]$都是纯不可分离扩张，这时我们知道对任意 $u\in D\setminus F$ 都有一个正整数 e，$x^{p^e}-\alpha$，$\alpha\in F$，是 u 的最小多项式。由于所有这些 $p^e\leqslant(D:F)$，故存在一个正整数 s，对任意 $u\in D$ 都有

$$u^{p^s}\in F.$$

取 D 在 F 上的一个基：$1,u_2,\cdots,u_n$，则 D 中任意元素 u 可写成

$$u=\xi_1+\xi_2u_2+\cdots+\xi_nu_n.$$

$$u^{p^s}=f_1(\xi)+f_2(\xi)u_2+\cdots+f_n(\xi)u_n\in F.$$

把 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 看成F上不定元，其中 $f_i(\xi)\in F[\xi_1,\cdots,\xi_n]$. 由于 F 是无限域而当 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 在 F 中取任意值时，$f_2(\xi)=\cdots=f_n(\xi)=0$，故 $f_2,\cdots,f_n$ 是零多项式。

现在取 D 的一个分裂域 K，那么对于 D_K 中任意元 $u=\alpha_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n,\alpha_i\in K$ 来说，便有

$$u^{p^s}=f_1(\alpha)\in K.$$

但这是不可能的，因为 $D_K=K_m$ 中矩阵单位 e_{11} 的任何次方仍等于 e_{11} 而不在系数域 K 中。此矛盾说明定理成立。∎

定理 3.5.4　设 D 是 F 上中心可除代数，则 D 含有极大子域 K 且 K 是 F 上分离扩域。

证　依上定理，D 含有异于 F 的 F 上分离扩域。由 $(D:F)$ 的有限性得 D 含有极大分离子域 K，即 K 不含在更大的分离子域中。

假定 K 不是 D 的极大子域。由定理 3.4.2，D^K 是可除代数 D 的单子代数，因而是可除代数且 $D^{(D^K)}=K$。另一方面，$D^K\supset K$，故 D^K 是 K 上中心可除代数，依上面定理 3，D^K 含有异于 K 的 K 上分离扩域 K'，随之 K' 是 F 上分离扩域。这与关于 K 的

选择是矛盾的，故 K 是 D 的极大子域。 ∎

这个定理中的 F 上分离扩域 K，依定理 2，是可除代数 D 的分裂域. 注意到 F 上分离扩域必含在 F 上正规扩域中以及分裂域的扩域仍是分裂域，便得下面重要结果.

定理 3.5.5 F 上中心单代数必有分裂域 N 且 N 是 F 上正规扩域. ∎

这样中心可除代数有正规扩域为其分裂域. 代数中一个著名的问题是：在 F 上中心可除代数 D 的极大子域（我们知道，它们都是 D 的分裂域）中有 F 上的正规扩域吗？Amitsur[3] 中给与否定的解决.

§6 一些特殊域上的中心可除代数

在本节中我们讨论有限域和实数域上的中心可除代数. 对它们给出完全的刻划. 这也可看作是 Noether-Skolem 定理的一些应用.

预理 1 设 G 是一个有限群，H 是 G 的一个真子群，则 $G\neq \bigcup_{g\in G} g^{-1}Hg$.

证 设 G 的阶为 n，H 的阶为 m，而 $n=mk, k\geqslant 2$，则因为利用 H 的同一左陪集的元素只能得出一个与 H 共轭的子群，故与 H 共轭的子群最多有 k 个. 每一与 H 共轭的子群之阶为 m 而它们都含有共同的单位元，所以其并的元素最多只能有 $mk-(k-1)=n-(k-1)<n$，故得预理. ∎

预理 2 若 K_1, K_2 是有 p^n 个元素的两个有限域且有共同子域 F，则把 K_1, K_2 看成 F 上代数时，它们也是同构的.

证 我们知道 K_1 和 K_2 都是素域 P 上多项式 $x^{p^n}-x$ 的完全分解域. 这样 K_1, K_2 也都可看作 F 上多项式 $x^{p^n}-x$ 的完全分解域，因而存在使 F 中元素不变的，K_1 和 K_2 间的同构对应，也就是 F 上代数 K_1, K_2 是同构的. ∎

定理 3.6.1(Wedderburn 定理) 任一有限除环 D 是一个域.

证 设 D 的中心是 F. 若 $D=F$,则定理得证. 设 $D\neq F$. 此时 D 是有限域 F 上有限维中心可除代数且 $(D:F)=n^2>1$. 依定理 3.5.2,D 有极大子域 K,$(K:F)=n$,$K\supset F$.

另一方面,D 中任意元素都必含在某个极大子域 K'中. 同样也有 $(K':F)=n$,$K'\supset F$. 依预理 2,F 上代数 K 和 K' 是同构的. 这样在 D 中有两个同构的单代数. 依 Noether-Skolem 定理,此同构对应可扩充为 D 的内自同构,随之,有 $d\in D$,使

$$d^{-1}Kd=K'.$$

这说明

$$D=\bigcup_{0\neq d\in D} d^{-1}Kd,$$

或

$$D^*=\bigcup_{d\in D^*} d^{-1}K^*d,$$

其中 $D^*=D\setminus\{0\}$,$K^*=K\setminus\{0\}$都是乘群,这与预理 1 的结果相矛盾. 故 $D=F$. ▎

此定理说明,有限域 F 上,除自己外没有有限维中心可除代数.

定理 3.6.2(Frobenius 定理) (一)若 D 是实数域 F 上有限维中心可除代数,则 D 同构于四元数代数(参看第一章§2 例 3).

(二) 实数域 F 上有限可除代数只有 F 本身,复数域和四元数代数.

证 任取定 D 的一个极大子域 K,则 K 是实数域 F 的有限扩域. 易知实数域上在同构意义下只有一个有限扩域,那就是复数域. 这样 $K=F+Fi$,其中 $i^2=-1$. 随之,依定理 3.5.2,$(D:F)=(K:F)^2=4$. 对应

$$\varphi: K\to K$$

$$\alpha+\beta i \to \alpha-\beta i,\ \alpha,\beta\in F$$

是 F 上单代数 K 到自身上的同构对应. 依 Noether-Skolem 定理,存在 $d\in D$,使

$$\alpha-\beta i=\varphi(\alpha+\beta i)=d^{-1}(\alpha+\beta i)d,$$

因而 $-i=\varphi(i)=d^{-1}id$. 这样 $-i=d^{-1}id=-d^{-1}d^{-1}idd$, 即 $d^2i=id^2$,从而 $d^2\in D^K$. 注意到 K 是极大子域, 故有 $D^K=K$, 随之 $d^2\in K$. 另一方面,

$$\varphi(d^2)=d^{-1}d^2d=d^2$$

而 K 中元素在共轭对应 φ 下不变的元素必在 F 中, 故实际上 $d^2\in F$. 由于 $d\notin F$, 故 d^2 不能是正实数,即 $d^2=-a^2, a\in F$. 令 $j=d/a$,则 $j^2=-1$, $ji=-ij$. 易证元素 $1, i, j, ij=k$ 在 F 上线性无关的. 注意到 $(D:F)=4$,便知它们组成 F 上代数 D 的一个基,而它们之间的乘法表刚好就是四元数代数的乘法表. 故得定理中的(一). 由(一)不难得(二),留给读者去作. ▎

§7 交 叉 积

域 F 上中心单代数依相似关系划分成一些等价类, 也就是 F 上 Brauer 群(简记作 $B(F)$)中的元素. 若能对这些等价类中的某个代表进行较深入研究,则对此类中的其他代数也就有了了解,因为它们与适当维数的全矩阵代数作张量积之后便是彼此同构的了. 选中心可除代数作这些等价类的代表是很自然的, 然而讨论起来却有很大困难. 本节中将讨论的交叉积是这些等价类的另一个代表.

定义 3.7.1 域 F 上的一个 n^2 维中心单代数 A 叫作 F 上的一个交叉积,如果 A 含有一个子域 N, $(N:F)=\sqrt{(A:F)}=n$ 且 N 是 F 上正规扩域.

若 A 是交叉积而 N 是其相应的子域,则依定理 3.4.2 及定理 3.5.1 易知 N 是 A 的分裂域.

下面定理说明交叉积所占的地位.

定理 3.7.1 域F上任一中心单代数A都与一个交叉积相似．

证 依定理3.5.5，A有分裂域N且N是F上正规扩域．令$A=D\otimes F_s$，而r是最小正整数使$B=D\otimes F_r$含有与F上代数N同构的子域，则把N看成B的单子代数时，应用§4中双中心化子定理及定理3.5.1知N是B的极大子域，且$(B:F)=(N:F)\cdot(B^N:F)=(N:F)^2$，故中心单代数$B$是交叉积．另一方面显然有$A$和$B$是相似的．▎

我们来讨论交叉积的构造．

设A是F上n^2维交叉积而N是相应的n次正规子域．设G是N在F上的Galois群，其阶为n，其元素用S,T等符号表示，其单位元记作E．G中每一元素S都是F上代数N的一个自同构，N中元素z在自同构S作用下的象记作z^S．由Noether-Skolem定理，必有$u_S\in A$，使得

$$u_S^{-1}zu_S=z^S \tag{1}$$

对G中每一S，我们把相应的u_S(当然它的取法不是唯一的)取定下来．我们约定在下面定理中使用这些符号．

定理 3.7.2 设A是F上n^2维交叉积，N是A的一个n次正规子域，G是N在F上的Galois群．$S,u_S,S\in G$之意义如上，则有

(一) A中每一元素a可以唯一地表成以下形式：

$$a=u_Sz_S+\cdots+u_Tz_T=\sum_{S\in G}u_Sz_S,\ z_S\in N.$$

(二) $zu_S=u_Sz^S$，$\forall z\in N,S\in G$.

(三) $u_Su_T=u_{ST}g_{S,T}$，其中$g_{S,T}\in N,\forall S,T\in G$.

(四) $g_{S,TR}\cdot g_{T,R}=g_{ST,R}g_{S,T}^R,\forall S,T,R\in G$.

证 由(1)便得(二)．

证(一)．利用代数A的乘法，F上向量空间A可以看成N的(右)代数模(注意，A和N之间的乘法是不交换的，A不是域N上

的代数而是N上的右模，作为域N上的代数右模仍有线性无关，维数等概念)。由$(A:F)=n^2$，$(N:F)=n$ 得 A 是N 上 n 维右模。为了证明(一)，现在只需证明 n 个元素 u_S，$S\in G$ 是N 上线性无关的。

假定它们线性相关，不妨认定$u_{S_1},\cdots,u_{S_r}$，$r<n$，是一个极大无关组。于是 u_{S_n} 可由它们线性表示，

$$u_{S_n}=u_{S_1}z_1+\cdots+u_{S_r}z_r, z_i\in N.$$

令 F 上正规扩域 $N=F(z_0)$，依已证过的(二)有

$$z_0u_{S_n}-u_{S_n}z_0^{S_n}=0,$$

$$u_{S_1}z_1(z_0^{S_1}-z_0^{S_n})+\cdots+u_{S_r}z_r(z_0^{S_r}-z_0^{S_n})=0.$$

随之有

$$z_i(z_0^{S_i}-z_0^{S_n})=0, i=1,\cdots,r.$$

但当 $i\neq n$ 时，S_i,S_n 是 $N=F(z_0)$的不同自同构，故

$$z_0^{S_i}-z_0^{S_n}\neq 0.$$

因而 $z_i=0$，$i=1,\cdots,r$，即得 $u_{S_n}=0$。但这是不可能的。(一)得证。

证(三)。对任意 $z\in N$，$S,T\in G$，有

$$zu_Su_T=u_Sz^Su_T=u_Su_Tz^{ST},$$

$$zu_{ST}=u_{ST}z^{ST},$$

故有

$$z(u_Su_Tu_{ST}^{-1})=u_Su_Tz^{ST}u_{ST}^{-1}=(u_Su_Tu_{ST}^{-1})z,$$

因而

$$u_Su_Tu_{ST}^{-1}=h_{S,T}\in A^N=N.$$

令 $g_{S,T}=h_{S,T}^{ST}$，则 $g_{S,T}\in N$ 且

$$u_Su_T=h_{S,T}u_{ST}=u_{ST}h_{S,T}^{ST}=u_{ST}g_{S,T}.$$

最后证(四)。利用 A 中乘法结合律$(u_Su_T)u_R=u_S(u_Tu_R)$并利用(二)，(三)直接计算便得。 ∎

这样，交叉积 A 的构造就由 N 和 N 中一个 n^2 个元素的集合 $g=\{g_{S,T}\}$完全决定了。把上面的讨论倒转过来，由 F 的一个正规扩域 N 以及 N 中一个满足定理中(四)的集合 $g=\{g_{S,T}\}$出

发，该也能构造出一个中心单代数来．先引入

定义 3.7.2 设N是域 F 上正规扩域而 G 是其 Galois 群．令 g 是 $G\times G$ 到 N 中的一个函数，在(S,T)处的值记作 $g_{S,T}$，且知 $g_{S,T}\neq 0,\forall S,T\in G$．若满足条件：

$$g_{S,TR}g_{T,R}=g_{ST,R}g_{S,T}^{R},\quad \forall S,T,R\in G,$$

则称 g 为N的一个因子组．

我们常把 g 和集合$\{g_{S,T}\}$等同起来．

现在来利用 F 上 n 次正规扩域 N(其 Galois 群是 G)以及其中的一个因子组 $g=\{g_{S,T}\}$来构造一个交叉积．

群 G 有 n 个元素 $S_1,\cdots,S_n$．形式地取 n 个符号 $u_{S_1},\cdots,u_{S_n}$，以之为基作域 N 上的右模 A．这样，A 中元素 a 可以唯一地表成

$$a=u_{S_1}z_1+\cdots+u_{S_n}z_n,\quad z_i\in N.$$

若 $b\in A$ 而 $b=u_{S_1}y_1+\cdots+u_{S_n}y_n,\ y_i\in N$，则

$$a+b=u_{S_1}(z_1+y_1)+\cdots+u_{S_n}(z_n+y_n),$$

$$az=u_{S_1}(z_1z)+\cdots+u_{S_n}(z_nz).$$

如下规定 A 中的乘法：

$$\Big(\sum_i u_{S_i}z_i\Big)\Big(\sum_i u_{S_i}y_i\Big)=\sum_{i,j}u_{S_iS_j}g_{S_i,S_j}z_i^{S_j}y_j.$$

这个形式定义的乘法可以设想为利用

$$zu_S=u_Sz^S,\quad z\in N,$$

$$u_Su_T=u_{ST}g_{S,T},$$

以及分配律而得．

直接验证，可知 A 中分配律和结合律都是成立的．例如看一下结合律，在证完分配律后，为此只需验证：

$$[(u_Sx)(u_Ty)](u_Rz)=(u_Sx)[(u_Ty)(u_Rz)].\qquad (2)$$

直接计算知

$$\begin{aligned}(2)\text{的左侧}&=(u_{ST}g_{S,T}x^Ty)(u_Rz)\\&=u_{(ST)R}g_{ST,R}g_{S,T}^{R}x^{TR}y^Rz,\\(2)\text{的右侧}&=(u_Sx)(u_{TR}g_{T,R}y^Rz)\\&=u_{S(TR)}g_{S,TR}g_{T,R}x^{TR}y^Rz.\end{aligned}$$

由于$\{g_{S,T}\}$是因子组以及$(ST)R=S(TR)$，故得(2)。

这样便得A是结合环。

定理 3.7.3 设N是域F上n次正规扩域，$g=\{g_{S,T}\}$是N的一个因子组，则上面构造的结合环A是一个交叉积。

证 首先证明环A有单位元$e=u_E g_{E,E}^{-1}$，这里的E是群G的单位元。

为此，计算

$$e(u_S z)=u_S g_{E,S}(g_{E,E}^S)^{-1}z,$$

$$(u_S z)e=u_S g_{S,E} g_{E,E}^{-1} z.$$

在因子组g所适合的关系式

$$g_{S,TR}g_{T,R}=g_{ST,R}g_{S,T}^R$$

中顺序令$S=T=E$，$R=S$以及$T=R=E$，得

$$g_{E,S}g_{E,S}=g_{E,S}g_{E,E}^S，即 g_{E,S}(g_{E,E}^S)^{-1}=1,$$

$$g_{S,E}g_{E,E}=g_{S,E}g_{S,E}，即 g_{S,E}(g_{E,E})^{-1}=1,$$

其中1是N中单位元。这样便得

$$e(u_S z)=(u_S z)e=u_S z,$$

即e是A的单位元。

其次证明环A的中心是eF。

显然eF属于A的中心。另一方面，假定$a=\sum u_S z_S$在A的中心内，由a与$ez(z\in N)$交换，得

$$\sum u_S z_S z=a(ez)=(ez)a=\sum u_S z^S z_S.$$

由于u_S组成A在N上的基，得

$$(z-z^S)z_S=0,\ \forall z\in N.$$

除非$S=E$，否则总有$z\in N$，使$z\neq z^S$，故得

$$z_S=0，当 S\neq E,$$

即

$$a=u_E z_E=e(g_{E,E}z_E)=ez_0,$$

其中$z_0=g_{E,E}z_E\in N$。再利用a与每一u_S交换，得

$$u_S z_0=u_S(ez_0)=(ez_0)u_S=u_S z_0^S,$$

$$z_0=z_0^S,\ \forall S\in G.$$

随之 $z_0 \in F$，即 $a = ez_0 \in eF$. 这就证明了环 A 的中心是 eF.

这时环 A 可看成其中心 $eF \simeq F$ 上的代数.

现在证明 A 是单代数.

令 I 是 A 的一个非零理想，则 I 有非零元素 $a = \sum\limits_{S} u_S z_S$. 若 a 至少含有两项:

$$a = u_S z_S + u_T z_T + \cdots,$$

取 $z \in N$ 使 $z^S \neq z^T$，则有

$$I \ni b = (ez)a - a(ez^T) = u_S z_S(z^S - z^T) + u_T z_T(z^T - z^T) + \cdots \neq 0,$$

但 b 比 a 至少少含一项. 这样最终可得，I 中含有形如 $u_S y$，$0 \neq y \in N$ 的元素. 此时

$$I \ni (u_S y)(u_{S^{-1}} z) = u_E g_{S,S^{-1}} y^{S^{-1}} z.$$

适当选择 $z \in N$ 可得 $e = u_E g_{E,E}^{-1} \in I$，因而 $I = A$.

总起来便得 A 是 eF 上的中心单代数. 另外 A 含有子域 $eN \simeq N$，eN 是 eF 上的正规扩域且 $(eN:eF) = n$，而 $(A:eF) = (A:eN)(eN:eF) = n^2$. 这就说明 A 还是 eF 上的一个交叉积. |

在上定理中若把 A 的单位元 e 与 F 的单位元 1 等同起来，随之把 eF 和 F，eN 和 N 等同起来，A 便是 F 上交叉积，并含有正规子域 N. 我们把由 N 及 $g = \{g_{S,T}\}$ 依上面定理作出的交叉积记作 (N, g)，它具有定理 2 中（一）、（二）、（三）、（四）的运算律.

很自然地提出问题：当正规扩域 N 的两个因子组 g, h 间有什么关系时，(N, g) 和 (N, h) 是同构的？

为了解决这个问题，还是先从一个已知的交叉积来考察. A 的正规子域 N 的每一个自同构 $S \in G$，依 Noether-Skolem 定理都可扩充成 A 的内自同构 φ_S，然而去实现它，可供选取的可逆元素 u_S 是有许多的. 如果 A 中可逆元素 u_S 可实现 φ_S，则对任意 $0 \neq c_S \in N$，$v_S = u_S c_S$ 也可实现 φ_S，因为

$$\begin{aligned} v_S^{-1} z v_S &= (u_S c_S)^{-1} z (u_S c_S) = c_S^{-1} u_S^{-1} z u_S c_S \\ &= c_S^{-1} \varphi_S(z) c_S = \varphi_S(z). \end{aligned}$$

这样，如果取 u_S，$S \in G$ 为 A 在 N 上的基，得因子组 g：

$$u_S u_T = u_{ST} g_{S,T},$$

则当取 $v_S, S \in G$ 为 A 在 N 上的基时便得另一因子组 h:

$$v_S v_T = v_{ST} h_{S,T},$$

由于

$$v_S v_T = (u_S c_S)(u_T c_T) = u_{ST} g_{S,T} c_S^T c_T = v_{ST} c_{ST}^{-1} g_{S,T} c_S^T c_T,$$

便得此两因子组 g 和 h 有关系

$$h_{S,T} = c_T c_S^T c_{ST}^{-1} g_{S,T}. \tag{3}$$

这就引出下面:

定义 3.7.3 若 g, h 是正规扩域N的两个因子组，并对任意 $S \in G$ 有 $0 \neq c_S \in N$ 使(3)成立，就说因子组 h 相伴于 g.

直接验证可知因子组间的相伴关系是一个等价关系，但这也可以从下面定理顺便得到.

定理 3.7.4 交叉积 $A=(N,g)$ 与 $B=(N,h)$ 同构当且仅当因子组 g 和 h 是相伴的.

证 A和B含有共同的子域N. 令

A 在N上的基是 $u_S, S \in G, u_S u_T = u_{ST} g_{S,T}$,

B 在 N 上的基是 $v_S, S \in G, v_S v_T = v_{ST} h_{S,T}$.

如果 g 与 h 相伴，即有 (3)，则在 A 中取 $w_S = u_S c_S$，则有 $w_S w_T = w_{ST} h_{S,T}$，注意到 w_S 也组成 A 在 N 上的一个基，由之便得 $A \simeq B$.

反之，设 $A \simeq B$ 而 φ 是 B 到 A 的一个同构对应. 在 φ 下B中之 N 对应到 A中子域$\bar{N}$上,

$$\varphi: \ N \to \bar{N}$$
$$z \mapsto \bar{z}.$$

注意到 N也在 A 中，这样 $\bar{z} \mapsto z$ 便给出 A 中两个子域 $\bar{N}$ 和 N 间的同构对应. 依 Noether-Skolem 定理此同构对应可扩充成A到A的内自同构，利用它及 φ 可得 B 与 A 间的同构对应 ψ，有

$$\psi: \ B \to A$$
$$N \to N$$
$$z \mapsto z, z \in N.$$

令 $w_S=\psi(v_S)\in A$，则

$$
\begin{aligned}
zw_S=\psi(zv_S)=\psi(v_Sz^S)=w_Sz^S,\\
w_Sw_T=\psi(v_Sv_T)=\psi(v_{ST}h_{S,T})=w_{ST}h_{S,T}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

由(4)得 $w_S^{-1}zw_S=u_S^{-1}zu_S$，即

$$zw_Su_S^{-1}=w_Su_S^{-1}z,\quad \forall z\in N.$$

于是

$$w_Su_S^{-1}=d_S\in A^N=N,$$

$$w_S=d_Su_S=u_Sd_S^S=u_Sc_S,$$

其中 $c_S\in N$. 重复前面作过的讨论便知$\{g_{S,T}\}$和$\{h_{S,T}\}$相伴. ▎

取定正规扩域 N，而 g,h 是 N 的两个因子组，作为函数，它们之间有乘法运算：$gh=f$，其中 $f_{S,T}=g_{S,T}h_{S,T}$，$S,T\in G$. 直接验证知f也是N的因子组. 易证N中所有因子组g关于此乘法作成 Abel 群 Q，它的单位元(也记作 1，称作单位因子组)是对任意(S,T)永远取值 $1\in N$ 的因子组，即 $1=\{1_{S,T}=1\}$，而因子组 $g=\{g_{S,T}\}$的逆元素是因子组$\{g_{S,T}^{-1}\}$. 易证 Q 中所有与单位元相伴的因子组作成Q的一个子群 I，而属于 I 的同一陪集的因子组是彼此相伴的. 这样，商群 Q/I 中的元素$\bar{g}$ (因子组g所在的陪集)就和彼此同构的交叉积(N,g')，$g'\in\bar{g}$ 组成的类一一对应起来. 这个商群就是同调代数中熟知的二维上同调群 $H^2(G,N^*)$，关于它我们将在下一节介绍.

在本节最后，我们来证明下面重要结果：

$$[(N,g)]\cdot[(N,h)]=[(N,gh)].$$

它把 Brauer 群中的乘法和因子组的乘法连系起来了.

为此，考察张量积 $C=(N,g)\otimes_F(N,h)$.

作为准备先讨论 $N\otimes_FN$.

为了符号清楚而简单，把 $N\otimes N$ 中子域 $N\otimes 1$ 记作N而把另一个子域 $1\otimes N$ 记作 $\bar{N}$，把 $n\otimes 1(n\in N)$简记作 n 而把 $1\otimes n(n\in N)$ 简记作 $\bar{n}$. 这样对应 ψ：$n\mapsto\bar{n}$ 给出 $N\otimes N$ 之子域N到子域$\bar{N}$上的一个同构对应. 相应的把正规扩域N的 Galois 群记作 G，把$\bar{N}$的记作 $\bar{G}$. N的自同构 $S\in G$ 在同构对应 ψ 下引起$\bar{N}$的一个

相应的自同构，把它记作 $\bar{S}$. 这样有

$$\psi: n^S \mapsto \overline{(n^S)} = \bar{n}^{\bar{S}}.$$

然而在下面为了简单将把 $\bar{S}$ 也记作 S，这样上式就变成

$$\overline{(n^S)} = \bar{n}^S,$$

这将不会引起混乱. 利用这样的符号来叙证下述的

命题 1 设 $N=F(\theta)$, $\bar{N}=F(\bar{\theta})$是域F上两个正规扩域，θ和 $\bar{\theta}$ 在F上的最小多项式为 $f(x)$，则 $N\otimes\bar{N}$中元素

$$e=\varphi(\theta,\bar{\theta})=\frac{\prod\limits_{S\neq E}(\theta-\bar{\theta}^S)}{\prod\limits_{S\neq E}(\theta-\theta^S)},$$

其中E是Galois 群G的单位元，有以下性质：

(一) $en=e\bar{n}$, $\forall n\in N$.

(二) $e^2=e\neq 0$.

(三) $e=\varphi(\theta^T,\bar{\theta}^T)$, $\forall T\in G$.

证 先提一下，$N\otimes\bar{N}$ 是交换代数，这样元素相乘时就不必注意其顺序了.

分离多项式 $f(x)$在N和 $\bar{N}$ 中的完全分解式顺序为：

$$f(x)=\prod_{S\in G}(x-\theta^S),\quad f(x)=\prod_{S\in G}(x-\bar{\theta}^S). \tag{5}$$

注意到 $f(x)$ 无重根，$\prod\limits_{S\neq E}(\theta-\theta^S)$是$N$中非零元素，因而是可逆元素，故 e 有意义. 由于 e 的分子是 θ 的 $n-1$ 次多项式而系数在$\bar{N}$中且有非零者，依定理 1.5.3，$e\neq 0$.

注意到(5)可知

$$e(\theta-\bar{\theta})=\frac{f(\theta)}{\prod\limits_{S\neq E}(\theta-\theta^S)}=0,$$

即得

$$e\theta=e\bar{\theta}.$$

随之有 $e\theta^i=e\bar{\theta}^i$, 故 $eg(\theta)=eg(\bar{\theta})$, $\forall g(x)\in F[x]$. 这也就是

$en=e\bar{n}, \forall n\in N$.（一）得证.

设 $T\in G$ 而令

$$e'=\varphi(\theta^T,\bar{\theta}^T),$$

则

$$ee'=e\varphi(\theta^T,\bar{\theta}^T)=e\cdot\frac{\prod\limits_{S\neq E}(\theta^T-\bar{\theta}^{TS})}{\prod\limits_{S\neq E}(\theta^T-\theta^{TS})}.$$

注意到 $\bar{n}^S=\overline{(n^S)}$以及(一)知 $e\bar{\theta}^{TS}=e\theta^{TS}$. 这样利用 e 可将分子中$\bar{N}$ 的元素都变成它在N中的相应元素，最后分子、分母就完全一样了. 因而有

$$ee'=e. \tag{6}$$

θ 和 θ^T 在 N 中的地位是对称的. 若令 $\theta'=\theta^T$, $S=T^{-1}$, 则 $e'=\varphi(\theta',\bar{\theta}')$而 $e=\varphi(\theta'^S,\bar{\theta}'^S)$, 也就是说 e', e 的地位随之也是对称的. 这样用同样方法可得 $e'e=e'$. 与(6) 合在一起便是 $e'=e$ 而 $e=\varphi(\theta^T,\bar{\theta}^T)$. 命题证完. ▎

为了我们的目的还要一个

预理 1 设 A 是 F 上中心单代数而 e 是 A 的一个幂等元，则 $[eAe]=[A]$.

证 依定理 2.5.1 及其前面的预理知 eAe 是单代数且当 e' 是 eAe 中的一个本原幂等元时 $e'(eAe)e'$ 是可除代数. 但

$$e'(eAe)e'=e'Ae',$$

这样 $e'Ae'$ 是可除代数，再由定理 2.5.1 知 e' 是 A 的本原幂等元. 另一方面，由定理 2.5.2 知单代数 A 的可除部分为由其本原幂等元 e' 确定的可除代数 $e'Ae'$,故有

$$A=e'Ae'\otimes F_n. \tag{7}$$

$$eAe=e'Ae'\otimes F_m. \tag{8}$$

由 (7) 知 $e'Ae'$ 是中心单代数，再由(8)，作为中心单代数的张量积，eAe 也是中心单的. 由(7)，(8)知 A 和 eAe 相似. ▎

定理 3.7.5 $(N,g)\otimes(N,h)\sim(N,gh)$.

证　令 $C=(N,g)\otimes(N,h)$.

C 含有子代数 $A=(N,\ g)$，$B=(\bar{N},\ \bar{h})$ 以及 $N\otimes\bar{N}$，其中 $N\subseteq A,\bar{N}\subseteq B,N\simeq\bar{N}$. 取 $N\otimes\bar{N}$ 中的幂等元 e 如命题 1.

令交叉积 A 在 N 上的基为 u_S，$S\in G$；B 在 $\bar{N}$ 上的基为 v_S，$S\in G$。这里我们仍把 N 和 $\bar{N}$ 的 Galois 群等同起来.

C 中每一元素可以写成

$$\sum a_ib_i=\sum\left[\left(\sum_S u_Sz_S\right)\left(\sum_T v_T\bar{z}_T\right)\right]=\sum\left(\sum_{S,T}u_Sv_Tz_S\bar{z}_T\right),$$

其中 $a_i\in A$，$b_i\in B$，$z_S\in N$，$\bar{z}_S\in\bar{N}$. 注意到 e 是幂等元且和 $N\otimes\bar{N}$ 中的元素都可换以及 $e\bar{n}=en$，则 eCe 中每一元素可写成

$$\sum\left(\sum_{S,\ T}eu_Sv_Tz_S\bar{z}_Te\right)=\sum(eu_Sv_Te)(z_{ST}e),$$

其中 $z_{ST}=z_Sz_T\in N$.

现在来计算 eu_Sv_Te. 注意到 $e=\varphi(\theta,\bar{\theta})$ 中的 θ 属于 N，与 B 中元素可换且 $\theta u_S=u_S\theta^S$，其中的 $\bar{\theta}$ 属于 $\bar{N}$ 而与 A 中元素可换且 $\bar{\theta}v_T=v_T\bar{\theta}^T$，我们有

$$eu_Sv_Te=\varphi(\theta,\bar{\theta})u_Sv_Te=u_S\varphi(\theta^S,\bar{\theta})v_Te=u_Sv_T\varphi(\theta^S,\bar{\theta}^T)e.$$

另一方面，与命题 1 类似地去计算可得

$$\varphi(\theta^S,\ \bar{\theta}^T)e=\frac{\prod\limits_{R\neq E}(\theta^S-\bar{\theta}^{TR})}{\prod\limits_{R\neq E}(\theta^S-\theta^{SR})}e=\frac{\prod\limits_{R\neq E}(\theta^S-\theta^{TR})}{\prod\limits_{R\neq E}(\theta^S-\theta^{SR})}e=\begin{cases}0,\text{当}\ T\neq S,\\ e,\text{当}\ T=S,\end{cases}$$

故有

$$\begin{aligned}&eu_Sv_Te=0,\ \text{当}\ S\neq T.\\&eu_Sv_Se=u_Sv_Se.\end{aligned}\tag{9}$$

这样 eCe 中每一元可以写成

$$\sum_{S\in G}(eu_Sv_Se)(z_Se).$$

对应 $z\mapsto ze$ 给出 F 上正规扩域 N 与 Fe 上正规扩域 Ne 之间的同构对应. 并在此同构对应下，与前面一样，把 N 在 F 上的 Ga-

lois 群 G 和 Ne 在 Fe 上的 Galois 群 G' 等同起来，这样就有

$$(ze)^S = z^S e.$$

另一方面，令

$$w_S = eu_S v_S e, \quad S \in G.$$

这样 eCe 中的元素可写成

$$\sum_S w_S(z_S e), \quad z_S e \in Ne. \tag{10}$$

下面我们来验证，w_S, ze 之间满足交叉积中所应满足的那些关系式．首先是

$$(ze)w_S = zeu_S v_S e = eu_S z^S v_S e = (eu_S v_S e)(z^S e) = w_S (ze)^S. \tag{11}$$

其次，注意到(9)，有

$$\begin{aligned} w_S w_T &= eu_S v_S (eu_T v_T e) = eu_S v_S u_T v_T e = eu_S u_T v_S v_T e \\ &= eu_{ST} g_{S,T} v_{ST} \bar{h}_{S,T} e = (eu_{ST} v_{ST} e)(g_{S,T} \bar{h}_{S,T} e) \\ &= w_{ST}(g_{S,T} h_{S,T} e). \end{aligned} \tag{12}$$

有了(11)，与前面定理 2 中(一)的证明一样，可以证明现在这里的 W_S, $S \in G$，在 Ne 上是线性无关的．

这样把(10)，(11)，(12)合在一起便得

$$eCe = (Ne, \{g_{S,T} h_{S,T} e\}) \simeq (N, \{g_{S,T} h_{S,T}\}) = (N, gh).$$

但由前面预理 1 $C \sim eCe$，故得 $(N,g) \otimes (N,h) \sim (N,gh)$． ▎

作为上面定理的推论，我们有

定理 3.7.6 (一) $(N, g) \sim F_m$ 当且仅当因子组 g 和单位因子组 1 是相伴的．

(二) $(N,g) \otimes (N,h) = F_n \otimes (N,gh)$．

证　先证(二)．由于 $(N,g) \otimes (N,h) \sim (N,gh)$，故

$$(N,g) \otimes (N,h) = D \otimes F_m,$$

$$(N,gh) = D \otimes F_t.$$

由于每一交叉积 (N,f) 的维数都等于 n^2，其中 n 是正规扩域 N 的次数．比较上面二等式中左侧两个 F 上代数的维数便得 $m = nt$．但 $F_{nt} = F_n \otimes F_t$，故有(二)．

其次证(一)．由(二)得

$$(N,1)\otimes(N,g)=F_n\otimes(N,1\cdot g)=F_n\otimes(N,g),$$

故

$$(N,1)=[(N,1)\otimes(N,g)]^{(N,g)}=F_n.$$

再利用一下定理 4 便得(一)．∎

§8 中心单代数的指数及其分解

在上节我们看到，研究域 F 上 Brauer 群 $B(F)$ 基本上归结为研究交叉积 (N,g)．而当取定 F 上的一个正规扩域 N 并令 g 取遍 N 中所有可能的因子组时，所有元素 $[(N,g)]$ 组成群 $B(F)$ 的一个子群 $\langle N\rangle$，并且这个子群与商群 Q/I 同构，其中 Q 是 N 中一切因子组作成的群而 I 是一切与单位因子组 1 相伴者组成的子群．

本节中我们来研究 $B(F)$ 的一个重要性质：$B(F)$ 是周期群．

定义 3.8.1 设 A 是 F 上中心单代数，$[A]$ 在群 $B(F)$ 中的阶叫作代数 A 的指数．

下面首先证明任意 A 的指数都是有限的．我们先采用另一种方法，即使用上同调群的方法，来得到这一结果，借以看到讨论 Brauer 群 $B(F)$ 的另一个不同的角度．

设 G 是一个群，M 是一个右 G-模，即 M 是以 G 中元素为(右)算子的 Abel 群且 $mE=m$，$m(ST)=(mS)T$，其中 $m\in M$，E 是群 G 的单位元而 S,T 属于 G．令 $G^{(n)}=G\times G\times\cdots\times G$ 是 n 个群 G 的直积，令

$$C^n=C^n(G,M)=\{f\mid f\text{ 是 }G^{(n)}\text{ 到 }M\text{ 内的任意函数}\}.$$

即 f 是 n 个自变量的函数，自变量都在 G 中取值而函数 f 在 M 中取值．当 $n=0$ 时，约定 $C^0(G,M)=M$．利用 M 中加法可得函数 f 之间的加法，C^n 关于此运算作成 Abel 群．

我们定义一个对应 δ^n：$C^n\to C^{n+1}$，把 $f\in C^n$ 对应到 $\delta^n f\in C^{n+1}$，

$$(\delta^n f)(x_1,\cdots,x_{n+1})=f(x_2,\cdots,x_{n+1})$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(x_1,\cdots,\ x_i x_{i+1},\ \cdots,\ x_{n+1})+(-1)^{n+1}f(x_1,\cdots,x_n)x_{n+1},\tag{1}$$

若当 $n=0, m\in C^0=M$，则规定$(\delta^0 m)(x_1)=m-mx_1$. 当 $n=1,2$，这就是

$$(\delta^1 f)(x_1,x_2)=f(x_2)-f(x_1x_2)+f(x_1)x_2,$$

$$(\delta^2 f)(x_1,x_2,x_3)=f(x_2,x_3)-f(x_1x_2,x_3)+f(x_1,x_2x_3)$$
$$-f(x_1,x_2)x_3.$$

δ^n 是 Abel 群 C^n 到 C^{n+1} 内的同态对应.

命题 1 $\delta^{n+1}\delta^n=0$.

证 我们只计算一下当 $n=1$ 的情况，一般情况留给读者去作. 任取 $f\in C^1$，即 f 是一个自变量的函数，

$$(\delta^2(\delta^1 f))(x_1,x_2,x_3)=(\delta^1 f)(x_2,x_3)-(\delta^1 f)(x_1x_2,x_3)$$
$$+(\delta^1 f)(x_1,x_2x_3)-[(\delta^1 f)(x_1,x_2)]x_3$$
$$=[f(x_3)-f(x_2x_3)+f(x_2)x_3]-[f(x_3)-f(x_1x_2x_3)$$
$$+f(x_1x_2)x_3]+[f(x_2x_3)-f(x_1x_2x_3)+f(x_1)x_2x_3]$$
$$-[f(x_2)-f(x_1x_2)+f(x_1)x_2]x_3=0.\ \blacksquare$$

现在考虑 C^n 的两个子群，一个是同态对应 δ^n 的核 $Z^n=\{f\in C^n|\delta^n f=0\}$，另一个是同态对应 δ^{n-1} 的象 $B^n=\{f\in C^n|f=\delta^{n-1}g, g\in C^{n-1}\}$. 由命题 1 知

$$0=\delta^n\delta^{n-1}C^{n-1}=\delta^n B^n,$$

$$B^n\subseteq Z^n, \text{当 } n\geqslant 1.$$

我们称商群 Z^n/B^n 为**以M为系数的群G的n次上同调群**，记作 $H^n(G,M)$.

定理 3.8.1 若 m 是有限群G的阶，则 $mH^n(G,M)=0, \forall n>0$.

证 设$f\in Z^n$，这就是对G中任意元素$x_1,\cdots,x_{n+1}$都有$(\delta^n f)(x_1,\cdots,x_{n+1})=0$. 由(1)得

$$f(x_2,\cdots,x_{n+1})=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}f(x_1,\cdots,x_ix_{i+1},\cdots,x_{n+1})$$

$$+(-1)^n f(x_1,\cdots,x_n)x_{n+1}.$$

令其中 x_1 取遍 G 中所有元素，并把所有这些等式相加，便是

$$mf(x_2,\cdots,x_{n+1})=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{x_1\in G}f(x_1,\cdots,x_ix_{i+1},\cdots,x_{n+1})$$

$$+(-1)^n\sum_{x_1\in G}f(x_1,\cdots,x_n)x_{n+1}.$$

令

$$h(x_2,\cdots,x_n)=\sum_{x_1\in G}f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

注意到当 x_1 取遍 G 时，x_1x_2 也取遍 G，故上式可改写成

$$mf(x_2,\cdots,x_{n+1})=h(x_3,\cdots,x_{n+1})$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i h(x_2,\cdots,x_{i+1}x_{i+2},\cdots,x_{n+1})$$

$$+(-1)^n h(x_2,\cdots,x_n)x_{n+1}=(\delta^{n-1}h)(x_2,\cdots,x_{n+1})\in B^n,$$

这就是 $mZ^n\subseteq B^n$，故 $mH^n(G,M)=0$. ▏

现在回到我们要讨论的问题上. N 是 F 上 n 次正规扩域，以 G 为 Galois 群. 令 $N^*=N\setminus\{0\}$. N^* 关于其中乘法作成 Abel 群(为了符号一致，把 N^* 的乘法暂时记作 +). N^* 很自然可看作右 G-模，易见 N 内因子组 $g\in C^2(G,N^*)$，而因子组之间的运算(相应地，也暂记作 +)与 C^2 中的运算显然是一致的.

命题 2 (一) $f\in C^2(G,N^*)$ 是因子组当且仅当 $f\in Z^2(G,N^*)$.

(二) N 中两个因子组 g,h 相伴当且仅当 $g-h\in B^2(G,N^*)$.

证 下面把 $f_{S,T}$ 写成 $f(S,T)$ 并将用 0 表示 N^* 中的 1，这是为了和用 + 表示 N^* 中乘法一致起来.

今证(一). 设 f 是因子组，这时 f 所满足的因子组关系式就该写成：对任意 $S_i\in G$,

$$f(S_1,S_2S_3)+f(S_2,S_3)=f(S_1S_2,S_3)+f(S_1,S_2)S_3, \qquad (2)$$

由之便得

$$(\delta^2 f)(S_1,S_2,S_3)=f(S_2,S_3)-f(S_1S_2,S_3)$$
$$+f(S_1,S_2S_3)-f(S_1,S_2)S_3=0, \quad (3)$$

即$f\in Z^2$.反之,若$f\in Z^2$,则有(3),因而有(2),即得f是因子组.

我们把(二)的证明留给读者. ▎

用本节开始时用的符号，便有 $Q/I\simeq Z^2/B^2=H^2(G, N^*)$，但$\langle N\rangle\simeq Q/I$,这便得$\langle N\rangle\simeq H^2(G,N^*)$. 注意到 Brauer 群的每一元素都可选一个交叉积作其代表,则由定理 1 便得

定理 3.8.2 (一) Brauer 群 $\boldsymbol{B}(F)$是周期群.

(二) $[(N,f)]$的阶整除$(N:F)$. ▎

上面得出中心单代数的指数是有限的. 利用交叉积以及关于单代数的结果,我们可以更精细的刻划中心单代数A的指数,并且下面的讨论不依赖上面的定理 1 和定理 2.

定理 3.8.3 设F上中心单代数 $A=D\otimes F_m$ 而 $(D:F)=n^2$,则$[A]^n=1$,因而A的指数整除 n.

证 令

$$A\sim B=(N,g)=D\otimes F_r,$$

此时$(N:F)=nr$.

令 e_{ij} 是 F_r 中的矩阵单位，则$W=e_{11}B=e_{11}D+e_{12}D+\cdots+e_{1r}D$ 是 B 的极小右理想.我们有$(W:F)=(W:D)(D:F)=rn^2$.另一方面，W 也可看成N上右代数模,这时有$(W:F)=(W:N)\cdot(N:F)=(W:N)nr$. 比较之便得$(W:N)=n$. 令

$$x_1,x_2,\cdots,x_n$$

是W 在 N 上的一个基,而

$$u_S,\quad S\in G$$

是B在N上的一个基且其相应的因子组为 g,即有

$$u_S u_T=u_{ST}g_{S,T}.$$

W 当然也是B上的右代数模,随之 $x_i u_S\in W$,故有

$$(x_1,\cdots,x_n)u_S=(x_1,\cdots,x_n)U_S,$$

其中U_S 是N上 n 阶矩阵. 此时有

$$(x_1,\cdots,x_n)u_Su_T=(x_1,\cdots,x_n)u_{ST}g_{S,T}$$
$$=(x_1,\cdots,x_n)U_{ST}g_{S,T},$$
$$(x_1,\cdots,x_n)u_Su_T=(x_1,\cdots,x_n)U_Su_T$$
$$=(x_1,\cdots,x_n)u_TU_S^T$$
$$=(x_1,\cdots,x_n)U_TU_S^T.$$

比较之得

$$U_{ST}g_{S,T}=U_TU_S^T. \tag{4}$$

两边取行列式得

$$|U_{ST}|g_{S,T}^n=|U_T|\cdot|U_S|^T. \tag{5}$$

由于 $u_Eg_{E,E}^{-1}$ 是 B 的单位元,因而它所对应的矩阵 $U_Eg_{E,E}^{-1}$ 是单位矩阵,这样由于由(4)可得

$$U_Eg_{E,E}^{-1}=U_SU_{S^{-1}}^Sg_{S^{-1},S}^{-1}g_{E,E}^{-1},$$

故

$$c_S=|U_S|\neq 0.$$

此时(5)给出

$$g_{S,T}^n=c_Tc_S^Tc_{ST}^{-1},$$

这就是说$\{g_{S,T}^n\}$与单位因子组相伴. 若令 $A^{(n)}$表示 n 个 A 所作的张量积，则依定理 3.7.5,

$$A^{(n)}\sim(N,g)^{(n)}\sim(N,g^n)\sim 1$$

即$[A]$的阶,也就是 A 的指数整除 n. ▮

下面定理使我们对 A 的指数有进一步了解.

定理 3.8.4 设域 F 上中心单代数 $A=D\otimes F_m$, 而 $(D:F)=n^2$,则 A 的指数 q 和 n 有相同的素数因数.

证 在上面已证过 A 的指数 q 整除 n, 故为了证明定理只需证明,若素数 $p|n$,则必 $p|q$.

取 A 的一个正规分裂域 N,$(N:F)=r$,则 N 当然也是 A 的可除代数部分 D 的分裂域,依定理 3.5.2 中的(三), 有 $n|(N:F)=r$. 随之 $p|r$. 假定 $p^i|r$ 而 $p^{i+1}\nmid r$,这里 $i\geqslant 1$.

r 也是 N 的 Galois 群 G 的阶. 根据群论中的 Sylow 定理, G 含有 p^i 阶子群 H. 在 Galois 对应下与 H 相应的 N 的子域记作 K,

则

$$(N:K)=p^{i},(K:F)=\frac{r}{p^{i}}.$$

随之 $p\nmid(K:F)$，当然更有 $n\nmid(K:F)$. 依定理 3.5.2，K 不能是 D 的，因而也不能是 A 的分裂域. 这时 K 上中心单代数

$$A_K=D'\otimes K_t,\ (D':K)=n_1^2,\ n_1>1.$$

但 $(A_K)_N=A_N$，所以 N 是 A_K 的分裂域，故有

$$n_1|(N:K)=p^{i}.$$

由定理 3，A_K 的指数 $q_1|n_1$，故

$$q_1|p^{i}.$$

注意到 A_K 不是 K 上全矩阵代数因而 $q_1>1$，便有

$$q_1=p^{j},\ j>0.$$

另一方面，

$$A^{(q)}\sim F_s. \tag{6}$$

由于

$$(A\otimes_F A)\otimes_F K=A_K\otimes_K A_K,$$

故

$$(A^{(2)})_K=A^{(2)}\otimes_F K=(A_K)^{(2)}.$$

一般地，对任意正整数 l 都有

$$(A^{(l)})_K=(A_K)^{(l)}.$$

当 $l=q$，并利用(6)，便有

$$(A_K)^{(q)}=(A^{(q)})_K\sim K_s.$$

故 $q_1|q$，随之 $p|q$. ∎

设 F 上中心单代数 $A=D\otimes F_m$ 的可除代数部分 D 之维数 $(D:F)=n^2$. n 常被称为 A 的**次数**. 设 A 的指数为 q，则它们的分解式依上定理为：

$$n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_t^{e_t},\ q=p_1^{f_1}p_2^{f_2}\cdots p_t^{f_t},$$
$$0<f_i\leqslant e_i,\ i=1,\cdots,t. \tag{7}$$

(7)中的等号不是永远成立的. 当 F 是代数数域或 p 进数域时，有 $n=q$. 这个重要结论对研究代数数域上的中心可除代数有本质意

义.关于这些中心可除代数,也就是有理数域上的可除代数的漂亮的刻划可视为有限维代数理论的巅峰. 这主要是 Albert, Brauer, Hasse, Noether 的工作,即证明了:若D是代数数域F上的中心可除代数,则$D=(N,g)$,且正规扩域N的 Galois 群G是循环群,设其元素为$E,S,S^2,\cdots,S^{n-1}$,此时因子组g有下面简单形式:

$$g_{S^i,S^j}=\begin{cases}1, 若\ i+j<n\\ a\in F, 若\ i+j\geqslant n.\end{cases}$$

Galois 群G是循环群的交叉积(N,g)叫作**循环代数**. 上述结果也就是说,每一有理数域上的可除代数都是其中心上的循环代数,有兴趣的读者参看 Albert(1).

在本节最后我们利用中心可除代数D的指数与次数的关系得到D的 Sylow 型的分解式.

先述群论中一个易证的结果以备引用.

命题 3 设G是 Abel 群,其元素a的阶

$$n=p_1^{f_1}\cdots p_t^{f_t},$$

p_i是不同的素数,则$a=b_1\cdots b_t$,其中$b_i\in G$, b_i的阶是$p_i^{f_i}$,$i=1,\cdots t$,并且这种表示法是唯一的. ∎

定理 3.8.5 设D_1和D_2是域F上中心可除代数,$(D_1:F)=n_1^2$,$(D_2:F)=n_2^2$且$(n_1,n_2)=1$,则$D_1\otimes D_2$也是F上中心可除代数.

证 $A=D_1\otimes D_2$,作为两个中心单代数的张量积,是中心单代数. 令$A=D\otimes F_m$. 为了证明定理只要证$m=1$. 为此作

$$\begin{aligned}D_1^{-1}\otimes A&=D_1^{-1}\otimes D_1\otimes D_2=F_{n_1^2}\otimes D_2\\&=(D_1^{-1}\otimes D)\otimes F_m=(D'\otimes F_r)\otimes F_m,\end{aligned}$$

其中D'是可除代数. 由此根据单代数分解的唯一性定理,得$n_1^2=mr$. 同样地可得$n_2^2=mr'$. 由$(n_1,n_2)=1$得$m=1$. ∎

定理 3.8.6 设D是F上中心可除代数,$(D:F)=n^2$, $n=p_1^{e_1}\cdots p_t^{e_t}$,$p_i$是不同素数,则$D=D_1\otimes\cdots\otimes D_t$,$D_i$是$F$上中心可除代数,$(D_i:F)=p_i^{2e_i}$,并且在同构意义下,$D_i$是唯一确定的.

证 看 Brauer 群中的元素$[D]$. 由上面定理知$[D]$的阶

$$q=p_1^{f_1}\cdots p_t^{f_t},\quad 0<f_i\leqslant e_i.$$

依命题 3，在 Abel 群 $B(F)$ 中有

$$[D]=[D_1][D_2]\cdots[D_t],\tag{8}$$

其中 $[D_i]$ 的阶是 $p_i^{f_i}$，并可认为 $[D_i]$ 的代表 D_i 是中心可除代数. 再利用 D_i 的次数与指数（即 $[D_i]$ 之阶）的关系，有

$$(D_i:F)=m_i^2,\quad m_i=p_i^{g_i}\ \text{且}\ f_i\leqslant g_i.\tag{9}$$

另一方面，(8) 说明

$$D\sim D_1\otimes\cdots\otimes D_t.$$

由上面定理 5 以及 (9) 可推得 $D_1\otimes\cdots\otimes D_t$ 是中心可除代数，两个相似的中心可除代数当然是同构的. 故可认定

$$D=D_1\otimes\cdots\otimes D_t.$$

比较 D 及 D_i 的维数得

$$(D_i:F)=p_i^{2e_i}.$$

最后，假定，另有中心可除代数 D_i'，使

$$D=D_1'\otimes D_2'\otimes\cdots\otimes D_t',\quad (D_i':F)=p_i^{2e_i},$$

则 $[D]=[D_1']\cdots[D_t']$. 再用一下 $[D_i']$ 的阶和 D_i' 的次数 $p_i^{e_i}$ 的关系知 $[D_i']$ 的阶是 $p_i^{h_i}$. 比较 $[D]$ 和 $[D_i']$ 的阶便得 $[D_i']$ 的阶是 $p_i^{f_i}$. 这样元素 $[D]$ 在 Abel 群 $B(F)$ 中有两种分解，由上面命题 3，知 $[D_i']=[D_i]$，随之 $D_i'\simeq D_i$，$i=1,\cdots,t$. ∎

上面定理把对有限维中心可除代数的研究在一定意义下归结为对维数是素数之幂的中心可除代数的研究.

习　题

1. A 是有单位元 1 的有限代数，B 是 A 的子代数，与 A 有共同的单位元，且 B 是中心单代数. 则 $A=B\otimes C$，其中 C 是 B 在 A 中的中心化子.

2. 设 B 是有单位元的有限代数，如果 B 具有性质："对任一有限代数 $A\supset B$，且与 B 有共同单位元，则必 $A=B\otimes C$." 证明 B 是中心单代数.

3. 证明若 C 是 F 上代数 A 的中心，则 C_K 是 K 上代数 A_K 的中心，此处 K 是 F 的一个扩域.

4. 证明实数域上的单代数是下述三种形式之一：(1) 全矩阵代数；(2) 全

矩阵代数与复数域的张量积；(3) 全矩阵代数与实数域上四元数代数的张量积。

5．设N在F上的 Galois 群 $G=\{E, S, \cdots, S^{n-1}\}$。试证明循环代数$(N, g)$与$(N, 1)$同构的充要条件是：存在 $z\in N$，使 $z\cdot z^{S}\cdots z^{S^{n-1}}=\alpha$
$\left(此处\ g_{S^i, S^j}=\begin{cases}1, i+j<n\\ \alpha, i+j\geqslant n\end{cases}\right)$。

6．设K是域F上有限扩域，证明映射

$$\psi: [A]\to[A_K]$$

是$B(F)$到$B(K)$里的一个群同态。决定 $\ker\varphi=?$

第四章　非半单代数

在前两章中，我们看到：若A是域F上有限结合代数，则

（一）A有幂零根N，它是A的唯一最大幂零理想，

（二）商代数A/N是单代数的直和.

本章要证的主要结果——Wedderburn 主要结构定理是说，若A/N是分离代数，则A有子代数S，使得$A=S+N$（子空间的直和），$S\cap N=\{0\}$. 此时易见$S\simeq A/N$是半单代数. Мальцев进一步证明这个子代数S在某种意义下是唯一的.

这个重要的 Wedderburn-Мальцев定理有不同的证法. 我们采取 Hochschild[1]中的方法，它也是讨论非结合代数的相应问题时采用的一种方法. 为了简单起见，我们限于讨论特征为零的域F上的代数. 此时F上每一半单代数都是分离代数（定理3.3.3）.

§1　迹　函　数

在本章中域F永远假设是特征为零者. 而A永远是F上有限结合代数.

在第一章中我们讨论过代数A的正则表示. 设$a\in A$，规定

$$R_a: x\to xa=xR_a,\quad x\in A,$$

$$L_a: x\to ax=xL_a,\quad x\in A,$$

则$R_a(L_a)$是F上向量空间A的线性变换. 取定A的一个F-基，则线性变换T对应一个F上的矩阵

$$T\to(\alpha_{ij})\in F_n. \tag{1}$$

此矩阵对角线元素之和$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ii}$称为线性变换$T$之**迹**，记作$\mathrm{Tr}(T)$.

由线性代数知 $\mathrm{Tr}(T)$ 与基的选择无关，它是T的所有特征根的和，即是T的特征多项式中次高项的系数乘以-1。

利用(1)，易证

$$\mathrm{Tr}(\alpha T_1+\beta T_2)=\alpha\mathrm{Tr}(T_1)+\beta\mathrm{Tr}(T_2). \qquad (2)$$

定义 4.1.1 假设 A 是F上有限结合代数，并令$(x,y)=\mathrm{Tr}(R_xR_y)$，$x,y\in A$，它是$A\times A$到$F$的一个对应，称之为代数$A$的迹函数。

下面我们讨论迹函数的一些基本性质．特别是把它同代数的幂零根以及代数的半单性等联系起来．

定理 4.1.1 F上结合代数A的迹函数(x,y)有下列性质：

i) $(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y)=\alpha_1(x_1,y)+\alpha_2(x_2,y),\alpha_i\in F,x_i,y_i\in A,$
$(x,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)=\alpha_1(x,y_1)+\alpha_2(x,y_2),i=1,2,$

ii) $(x,y)=(y,x)$,

iii) $(x,yz)=(xy,z),x,y,z\in A$.

证 由(2)便得 i)。

由于对任意矩阵 P,Q,PQ和QP有相同的迹，故 $\mathrm{Tr}(R_xR_y)=\mathrm{Tr}(R_yR_x)$，即有 ii)。

由乘法结合律得，$R_{xy}=R_xR_y$，故有 $R_xR_{yz}=R_xR_yR_z=R_{xy}R_z$，因而$(x,yz)=\mathrm{Tr}(R_xR_{yz})=\mathrm{Tr}(R_{xy}R_z)=(xy,z)$，即得iii)．▎

定理 4.1.2 设A是特征为零的域F上的有限结合代数，e是A的幂等元，则$(e,e)\neq0$。

证 由 $R_eR_e=R_{e^2}=R_e$，故 R_e 是幂等的线性变换，即满足方程 $x^2-x=0$．这样 R_e 的特征值只有 0 和 1．又 $R_e\neq0$，其特征值不能都是零。注意到F的特征为零，故$(e,e)=\mathrm{Tr}(R_e)\neq0$．▎

定理 4.1.3 设A是特征为零的域F上的有限结合代数．A是幂零代数$\Longleftrightarrow(x,y)=0,\forall x,y\in A$.

证 “$\Leftarrow$”．若A不是幂零的，则由定理 2.1.2，A有幂等元，由定理 4.1.2，$(e,e)\neq0$，这与假设矛盾，故A是幂零代数．

“$\Rightarrow$”．若 $a\in A$是幂零元素，则 R_a 是幂零线性变换，其特征多项式为 x^n．故 $\mathrm{Tr}(R_a)=0$．因此若A是幂零代数，则$(x,y)=$

$\mathrm{Tr}(R_xR_y)=\mathrm{Tr}(R_{xy})=0, \forall x,y\in A$. ▎

作为这个定理的一个推论，我们有

定理 4.1.4(Wedderburn 定理) 设A是特征为零的域F上的有限结合代数. A是幂零代数$\Longleftrightarrow A$有一个由幂零元素组成的基.

证 显然只需证"$\Leftarrow$". 设$a_1,\cdots,a_n$是幂零元且组成A的一个基. 由上面定理的证明知$\mathrm{Tr}(R_{a_i})=0$, 因而对A的任意元素$a=\sum\alpha_ia_i$, 有

$$\mathrm{Tr}(R_a)=\sum\alpha_i\mathrm{Tr}(R_{a_i})=0.$$

故对任意$x,y\in A$, $(x,y)=\mathrm{Tr}(R_{xy})=0$. 由上定理即得$A$是幂零的. ▎

实际上这个定理对任意域F上代数都成立. 参看 Abian[1].

设S是代数A的子集. 约定

$$S^{\perp}=\{x\in A\,|\,(x,s)=0,\forall s\in S\}.$$

常把$(x,s)=0$, $\forall s\in S$, 简写成$(x,S)=0$. 因为$(x,s)=(s,x)$, 故也有 $S^{\perp}=\{x\in A\,|\,(S,x)=0\}$.

预理 1 若S是代数A的理想, 则$S^{\perp}$是A的理想.

证 易见$S^{\perp}$是A的子空间. 设$x\in S^{\perp}$, $a\in A$. 由于$aS\subseteq S$, $Sa\subseteq S$, 故有

$$(xa,S)=(x,aS)=0,$$
$$(ax,S)=(S,ax)=(Sa,x)=0,$$

即$xa,ax\in S^{\perp}$, 故$S^{\perp}$是理想. ▎

预理 2 设I是代数A的理想, 代数A的迹函数记作$(x,y)_A$而代数I的迹函数记作$(x,y)_I$. 对$x\in I$, 用$(R_x)_A$, $(R_x)_I$顺序表x在代数A, 代数I中所确定的右乘, 则有

i) $\mathrm{Tr}((R_x)_A)=\mathrm{Tr}((R_x)_I), x\in I$.

ii) $(x,y)_A=(x,y)_I, \forall x,y\in I$.

证 取A的一个基$a_1,\cdots,a_s,\cdots,a_n$, 使其中$a_1,\cdots,a_s$组成$I$的一个基. 在此基下, 对$I$中任意元素$x$, 注意到$I$是理想, 有对应

$$(R_x)_A\to\begin{pmatrix}P & 0\\ Q & 0\end{pmatrix},\ (R_x)_I\to(P),$$

其中 0 表示零矩阵．这时显然有i)．

由 i)便直得 ii)．▍

定理 4.1.5 设A是特征为零的域F上代数而N是A的幂零根，则 $N=\{x\in A\mid(A,x)=0\}=A^{\perp}$.

证 由预理知 $A^{\perp}$ 是 A 的理想且

$$(A^{\perp},A^{\perp})_A{}^{\perp}=(A^{\perp},A^{\perp})_A=0.$$

故由定理 4.1.3，知 $A^{\perp}$ 是幂零代数，因而是A的幂零理想．即 $A^{\perp}\subseteq N$.

另一方面，N是理想，它本身又是幂零代数，故由定理 4.1.3 的证明过程有

$$\mathrm{Tr}((R_x)_N)=0,\forall x\in N.$$

由预理 2 有

$$\mathrm{Tr}((R_x)_A)=\mathrm{Tr}((R_x)_N).$$

任取 $a\in A,x\in N$，则有 $ax\in N$，故

$$(a,x)=\mathrm{Tr}((R_{ax})_A)=\mathrm{Tr}((R_{ax})_N)=0,$$

即有$N\subseteq A^{\perp}$。连同上面的，便有 $N=A^{\perp}$．▍

定义 4.1.2 说代数A的迹函数(x,y)是非退化的，如果 $A^{\perp}=0$，即不存在非零元素 y，使$(A,y)=0$。

由定理 4.1.5 便有

定理 4.1.6 设A是特征为零的域F上的有限结合代数，则A是半单代数$\Longleftrightarrow A$的迹函数是非退化的．▍

§ 2 半单代数的对偶基

由 §1 知半单代数的迹函数(x,y)是非退化的。

定义 4.2.1 说半单代数的两个基：$\{a_1,\cdots,a_n\},\{b_1,\cdots,b_n\}$是对偶的，如果$(a_i,b_j)=\delta_{ij},\forall i,j$，其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号．

定理 4.2.1 在特征为零的域F上的半单代数A中，对它的

任意一个基$\{a_1,\cdots,a_n\}$，必存在与之对偶的基$\{b_1,\cdots,b_n\}$.

证　半单代数的迹函数(x,y)是非退化的，故必有行列式$|(a_i,a_j)|$不等于零．这是因为，任取元素$x=\sum x_j a_j$，x_j的线性方程组

$$(a_i,x)=\sum_j x_j(a_i,a_j)=0,\quad i=1,\cdots,n,$$

由于$A^{\perp}=0$，只有零解，故其系数行列式$|(a_i,a_j)|\neq 0$.

为了证明$\{a_1,\cdots,a_n\}$的对偶基的存在，设$b_k=\sum x_j a_j$，则，由于$|(a_i,a_j)|\neq 0$，x_j的线性方程组

$$(a_i,b_k)=\sum_j x_j(a_i,a_j)=\delta_{ik},\ i=1,\cdots,n$$

必有唯一解．因而存在$\{b_1,\cdots,b_n\}$满足条件：$(a_i,b_j)=\delta_{ij}$．剩下来要证的是$\{b_1,\cdots,b_n\}$是A的一个基．设若$\sum\alpha_j b_j=0$，则

$$0=(a_i,0)=(a_i,\sum\alpha_j b_j)=\alpha_i,\quad i=1,\cdots,n,$$

即$\{b_1,\cdots,b_n\}$线性无关，因而是A的基．|

定理 4.2.2(Casimir 预理)　特征为零的域F上的半单代数A有对偶基$\{a_1,\cdots,a_n\}$，$\{b_1,\cdots,b_n\}$，则对任意$a\in A$，有

i) $a_i a=\sum_j \alpha_{ij}a_j$，$ab_i=\sum_j \alpha_{ji}b_j$，$i=1,\cdots,n$；

ii) $h=\sum_i b_i a a_i$ 在A的中心中；

iii) 集合 $\Gamma(A)=\left\{\sum_i b_i x a_i,\ x\in A\right\}$与对偶基$\{a_i\}$，$\{b_i\}$的选择无关.

证　i) 设 $a_i a=\sum_k \alpha_{ik}a_k$，$ab_j=\sum_k \beta_{jk}b_k$，则有

$$\alpha_{ij}=\left(\sum_k \alpha_{ik}a_k,b_j\right)=(a_i a,b_j)=(a_i,ab_j)$$

$$=\left(a_i,\ \sum_k \beta_{jk}b_k\right)=\beta_{ji},$$

故$ab_j=\sum_i \alpha_{ij}b_i$，调换$i$，$j$便是$ab_i=\sum_j \alpha_{ji}b_j$.

ii）设 $h=\sum b_i a a_i$，$a, x\in A$，则利用 i)，有

$$xh=x\cdot\sum_i b_i a a_i=\sum_i x b_i a a_i=\sum_{i,j}\alpha_{ji}b_j a a_i,$$

$$hx=\left(\sum_i b_i a a_i\right)x=\sum_i b_i a a_i x=\sum_{i,j}\alpha_{ij}b_i a a_j,$$

故 $xh=hx$，即 h 在 A 的中心内。

iii）设$\{a_i\}$，$\{b_i\}$；$\{a_i'\}$，$\{b_i'\}$是两组对偶基，今证 $\left\{\sum_i b_i x a_i, x\in A\right\}=\left\{\sum_i b_i' x a_i', x\in A\right\}$.

设 $a_i'=\sum_j \xi_{ij}a_j$，$b_i'=\sum_j \eta_{ij}b_j$. 对任意 i,j 有

$$\delta_{ij}=(a_i', b_j')=\left(\sum_k \xi_{ik}a_k, \sum_l \eta_{jl}b_l\right)=\sum_k \xi_{ik}\eta_{jk}.$$

把这些关系式用矩阵表示即是$(\xi_{ij})(\eta_{ij})'=I_n$，所以$(\eta_{ij})'(\xi_{ij})=I_n$，其中 I_n 是 n 阶单位矩阵，而$(\eta_{ij})'$表示矩阵(η_{ij})的转置矩阵.

此时任取 $x\in A$，则有

$$\sum_i b_i' x a_i'=\sum_i\left(\sum_j \eta_{ij}b_j\right)x\left(\sum_k \xi_{ik}a_k\right)$$

$$=\sum_{j,k}\left(\sum_i \eta_{ij}\xi_{ik}\right)b_j x a_k=\sum_{j,k}\delta_{jk}b_j x a_k=\sum_j b_j x a_j,$$

即 $\Gamma(A)$和对偶基之选择无关. ▎

定理 4.2.3 设A是特征为零的域F上的半单代数，$\{a_1,\cdots,a_n\}$是A的一个基，则必存在元素 $a_1',\cdots,a_n'$，使得

i）对任意 $a\in A$，由 $a_i a=\sum_j \alpha_{ij}a_j$ 可推得 $aa_i'=\sum_j \alpha_{ji}a_j'$；

ii）$\sum_i a_i' a_i=1$，其中 1 是A的单位元.

证 对给定的基 $\{a_1,\cdots,a_n\}$，取一个与之对偶的基 $\{b_1,\cdots,b_n\}$，则对A的迹函数(x,y)有$(a_i,b_j)=\delta_{ij}$. 只要我们能证明，存在元素 $a\in A$，使

$$\sum_{i=1}^{n} b_i a a_i = 1$$

即可，因为此时只要取 $a_i' = b_i a$ 即可得 i), ii)， 而为此只要证明 $1 \in \Gamma(A)$就可以了.

由于F的特征为零，故半单代数A是分离代数，因而依定理 3.3.4，存在F的有限扩域K使 A_K 是K上全矩阵代数 A_μ，$\mu=1, \cdots, t$，的直和.设 A_μ 中矩阵是 $m_\mu \times m_\mu$ 的.利用 A_K 在K上的一个基$\{e_{ij}^\mu\}$，其中对每一固定$\mu=1,\cdots,t$，$\{e_{ij}^\mu\}$是 A_μ 的，由矩阵单位组成的基，我们来证 $1 \in \Gamma(A_K)$。

显然，$\{e_{ij}^\mu\}$有乘法表

$$e_{ij}^\mu e_{pq}^\eta = \delta_{\mu\eta}\delta_{jp}e_{iq}^\mu.$$

设 A_K 的迹函数为$(x,y)_K$，令$(e_{ij}^\mu)^* = e_{ji}^\mu$，则有

$$\begin{aligned}((e_{ij}^\mu)^*, e_{pq}^\eta) &= (e_{ji}^\mu, e_{pq}^\eta) = (1, e_{ji}^\mu e_{pq}^\eta) = (1, \delta_{\mu\eta}\delta_{ip}e_{jq}^\mu)\\ &= (e_{pq}^\eta, e_{ji}^\mu) = (1, e_{pq}^\eta e_{ji}^\mu) = (1, \delta_{\eta\mu}\delta_{qj}e_{pi}^\mu).\end{aligned}$$

由此看出，当 $e_{ij}^\mu \neq e_{pq}^\eta$ 时

$$((e_{ij}^\mu)^*, e_{pq}^\eta) = 0,$$

而

$$((e_{ij}^\mu)^*, e_{ij}^\mu) = (1, e_{ii}^\mu) = \mathrm{Tr}(R_{e_{ii}^\mu}) = m_\mu.$$

这样 $\{m_\mu^{-1}(e_{ij}^\mu)^*\}$是$\{e_{ij}^\mu\}$ 的对偶基. 但这里需注意，一定要让$(e_{ij}^\mu)^*$在第一个基中排列的序数与 e_{ij}^μ 在第二个基中的相同.

取

$$b = \sum_{\eta=1}^{t} m_\eta e_{11}^\eta \in A_K,$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,\mu} m_\mu^{-1}(e_{ij}^\mu)^* b (e_{ij}^\mu) &= \sum_{i,j,\mu,\eta} m_\mu^{-1} e_{ji}^\mu m_\eta e_{11}^\eta e_{ij}^\mu\\ &= \sum_{j,\mu} e_{j1}^\mu e_{11}^\mu e_{1j}^\mu = \sum_{j,\mu} e_{jj}^\mu = 1,\end{aligned}$$

即 $1 \in \Gamma(A_K)$。

另一方面，$\{a_i\}$，$\{b_i\}$也是 A_K 的基，注意到对任意 $x, y \in A$，则

$(x,y)=(x,y)_K$，故它们也是 A_K 的对偶基．由定理 4.2.2 知，$\Gamma(A_K)$ 与对偶基之选择无关，故知存在 $x\in A_K$，使得

$$\sum_i b_i x a_i = 1. \tag{1}$$

利用(1)，下面来证明，(1)中的 x 实际上可取自 A。

把(1)中元素 x 以及 1 通过基 $\{a_i\}$ 表示时，则有

$$x=\sum_i x_i a_i,\quad x_i\in K,$$

$$1=\sum_i \beta_i a_i,\quad \beta_i\in F.$$

注意到 a_i, b_j 都是 A 中的元素，它们间的任何乘积用基 $\{a_i\}$ 表示时其系数都在 F 中，故知等式 (1) 说明 F 上某一关于 x_i 的线性方程组在 F 的扩域 K 中有解，由线性方程组的理论知，它在 F 中也必有解，即有 $\alpha_i\in F$，使 $a=\sum_i \alpha_i a_i\in A$ 满足(1)，即 $\Sigma b_i a a_i=1$. 这样即得定理．▎

§3 代数模的扩张与广义导子

设 A 是域 F 上有限代数．A 上的左代数模将简记作左 A-模，其子模记作 A-子模．A 上代数模之间的同态记作 A-同态，相应地，F 上向量空间的同态则记作 F-同态．

定义 4.3.1 一个左 A-模 U 叫作左 A-模 N 借助左 A-模 M 的扩张，如果 N 是 U 的 A-子模，且商模 U/N 与 M 是 A-同构；这也就是说存在 U 到 M 上的一个 A-同态 φ，φ 的核是 N.

对给定的 A-模 N，M，N 借助 M 的扩张 U 是存在的，例如取 $U=N\oplus M$ 就是，它是最简单的一种扩张，也是我们在本章中最感兴趣的情形．

定义 4.3.2 A-模 N 借助 M 的扩张 U 叫作可裂的，如果 $U=N\oplus M_1$. 此时显然有 $M_1\simeq M$.

预理 1 A-模 U 是 N 借助 M 的一个扩张，而 φ：$U\to M$ 是

相应的 A-同态对应，则扩张 U 是可裂的$\Longleftrightarrow$存在M到U的一个 A-同态对应 ψ，有 $\varphi\psi=1$。

证 "$\Rightarrow$"。若扩张 U 是可裂的，则 $U=N\oplus M_1$。此时 φ 诱导出 M_1 到 M 上的一个 A-同构对应 θ。取 $\psi=\theta^{-1}$，则 ψ 是M到U 内的一个 A-同态且有 $\varphi\psi=1$。

"$\Leftarrow$"。若 $\varphi\psi=1$，则考虑

$$u=\psi\varphi u+(u-\psi\varphi u),\quad u\in U.$$

易见 $M_1=\{\psi\varphi u,\ u\in U\}$，$N_1=\{u-\psi\varphi u,\ u\in U\}$是$U$的子模，且

$$\psi\varphi(\psi\varphi u)=\psi(\varphi\psi)\varphi u=\psi\varphi u,$$
$$\varphi(u-\psi\varphi u)=\varphi u-\varphi u=0,$$

故有 $N_1=N$ 是 φ 的核且 $U=M_1\oplus N_1=M_1\oplus N$。即扩张$U$是可裂的。 |

现在我们来讨论，N借助M的一个任意扩张U如何通过N和M来表示。

设 φ：$U\to M$ 是相应的 A-同态对应，φ 的核是 N。作为向量空间N借助于向量空间 M 的扩张，U是可裂的，这是因为子空间N永远是向量空间U的直和项。故依预理 1（把预理中的 A 取作 F），存在有M到U内的一个 F-同态对应 ψ，使

$$\varphi\psi=1,\quad \psi\in \mathrm{Hom}_F(M,U). \tag{1}$$

其中 $\mathrm{Hom}_F(M,U)$ 表示F上向量空间M到U的一切 F-同态对应组成的F上向量空间。

由于作为向量空间，U与 N，M 的关系是简单的，即 U是 N，M 的直和，因而考察 A-模U和 A-模 N、M 之间的关系应把着眼点放在模运算上。这要求我们对元素差

$$\psi(am)-a\psi(m),\quad a\in A,\quad m\in M,$$

作仔细的考察。

首先，有 $\psi(am)-a\psi(m)\in N$。这是因为

$$\varphi(\psi(am)-a\psi(m))=\varphi\psi(am)-a\varphi\psi(m)$$
$$=am-am=0.$$

其次，对于取定的 $a\in A$，对应

$f(a)$: $m \to \psi(am) - a\psi(m)$, $m \in M$, 确定 M 到 N 的一个 F-同态对应. 注意到 $\psi \in \mathrm{Hom}_F(M, U)$, 这一点是容易验证的. 这样 $f(a) \in \mathrm{Hom}_F(M, N) = T$.

考虑 A 到 T 的对应

$$f: a \to f(a),\ a \in A.$$

由于, 对 $m \in M$,

$$f(a+b)m = \psi((a+b)m) - (a+b)\psi(m) = \psi(am+bm)$$
$$-a\psi(m) - b\psi(m) = \psi(am) - a\psi(m) + \psi(bm) - b\psi(m)$$
$$= f(a)m + f(b)m = (f(a)+f(b))m,$$

以及类似可证的 $f(\alpha a)m = (\alpha f(a))m$, 可得 $f \in \mathrm{Hom}_F(A, T)$.

为了进一步讨论 $f(a)$ 对于代数 A 的乘法运算的性质,我们需要下面的

定义 4.3.3 A 是 F 上代数, T 是 F 上向量空间. 若 T 是左 A-模又是右 A-模, 且有

$$(at)b = a(tb),\ \forall t \in T,\ \forall a, b \in A,$$

则称 T 为 A-双模.

现在以下面的自然方式把向量空间 T 加工成 A-双模, 即对 $t \in T, a \in A$, 规定

$$ta: m \to t(am),\ at: m \to a(tm),\ \forall m \in M. \tag{2}$$

直接验证可知 ta, $at \in T$, 并且 T 关于上述模运算作成 A-双模.

我们来计算 $f(ab)$, a, $b \in A$,

$$f(ab)m = \psi((ab)m) - ab\psi(m)$$
$$= \psi(a(bm)) - a\psi(bm) + a(\psi(bm) - b\psi(m))$$
$$= f(a)(bm) + a(f(b)m)$$
$$= (f(a)b)m + (af(b))m = (f(a)b + af(b))m,$$

故有

$$f(ab) = f(a)b + af(b),\ \forall a, b \in A. \tag{3}$$

这样, 利用 A-双模的概念, 可以与扩张 U 无关地来刻划 f 这个概念, 它在研究扩张时起重要的作用.

定义 4.3.4 设 A 是 F 上代数而 T 是任意 A-双模. 一个对

应 f：$A \to T$ 叫作广义导子，如果它满足：

i) $f \in \mathrm{Hom}_F(A, T)$，即 f 是 F-同态对应，

ii) (3)成立。

这样，由已知扩张U出发，选定一满足(1) 的 ψ，便得一广义导子 f，特称之为U的与ψ相应的广义导子。

反过来，假若给定 A-模 N, M，依(2)使 $T = \mathrm{Hom}_F(M, N)$ 成为A—双模，并且给定一个广义导子 f：$A \to T$，我们可以利用这个 f 构造出一个N借助M的扩张U。

为此，作向量空间N和M的直和 $U = N + M$. 对任意 $u \in U$，利用它的唯一表示式

$$u = n + m, \quad n \in N, \quad m \in M,$$

规定

$$a \circ u = an + f(a)m + am, \tag{4}$$

其中 $an(am)$是 A-模 $N(M)$中的模运算, $f(a)m \in N$.

向量空间U关于运算$\circ$作成 A-模. 这是因为，利用(4),(3)(2),有

$$\begin{aligned}(ab)\circ u &= (ab)n + f(ab)m + (ab)m\\ &= a(bn) + (af(b) + f(a)b)m + a(bm)\\ &= a(bn) + a(f(b)m) + f(a)(bm) + a(bm);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\circ(b\circ u) &= a\circ((bn + f(b)m) + bm)\\ &= a(bn + f(b)m) + f(a)(bm) + a(bm)\\ &= a(bn) + a(f(b)m) + f(a)(bm) + a(bm).\end{aligned}$$

因而 $(ab)\circ u = a\circ(b\circ u)$. 对于其他模条件的验证留给读者.

易见 A-模 U 以 A-模 N 为子模，且商模 U/N 和 A-模M同构，即U是N借助M的一个扩张.

这样，扩张U和广义导子 f 之间就有一个相互对应的关系. 很自然地要问：对于同一个扩张 U，采用不同的满足 (1) 的ψ，所得到的广义导子之间有什么关系呢？或者用另外一种提法：对两个给定的广义导子，在它们之间有什么关系时，它们依上法所确定的扩张是同构的呢？

定理 4.3.1 设 A-模 U 是 N 借助 M 的一个扩张，φ：$U\to M$ 是相应的 A-同态对应。ψ_1，ψ_2 满足（1）。设与 ψ_i 相应的广义导子是 f_i，$i=1$，2，则必存在 $t\in T=\mathrm{Hom}_F(M, N)$，有

$$f_1(a)-f_2(a)=at-ta, \quad \forall a\in A.$$

证 由于 $\varphi((\psi_2-\psi_1)m)=(\varphi\psi_2-\varphi\psi_1)m=0$，故 $(\psi_2-\psi_1)m\in N$，即 $\psi_2-\psi_1=t\in\mathrm{Hom}_F(M, N)$。另一方面，

$$\begin{aligned}(f_1(a)-f_2(a))m&=\psi_1(am)-a\psi_1(m)-(\psi_2(am)-a\psi_2(m))\\&=a(\psi_2-\psi_1)(m)-(\psi_2-\psi_1)(am)\\&=(at-ta)m.\end{aligned}$$

故有 $f_1(a)-f_2(a)=at-ta$。|

定义 4.3.5 设 A 是代数而 T 是 A-双模。f_i：$A\to T$ 是广义导子，$i=1$，2。称 f_1 和 f_2 是同调的，如果有 $t\in T$，使

$$f_1(a)-f_2(a)=at-ta, \quad \forall a\in A.$$

易见，广义导子之间的同调关系是等价关系。

定理 4.3.2 设 N 和 M 是两个 A-模，$T=\mathrm{Hom}_F(M, N)$ 由（2）是 A-双模。若 f_i：$A\to T$ 是广义导子，且是同调的，而 N 借助 M 的扩张 U_i 是由 f_i 构造得的，$i=1,2$，则 A-模 $U_1\simeq U_2$。

证 由于 f_1，f_2 是同调的，故有 $t\in T$。

$$f_1(a)-f_2(a)=at-ta, \quad \forall a\in A.$$

此时，$U_1=N+M$ 到 $U_2=N+M$ 上的对应

$$\theta: u_1=n+m\to u_2=(n+tm)+m, u_i\in U_i, i=1,2,$$
$$n\in N, m\in M,$$

给出 A-模 U_1 到 A-模 U_2 的同构对应。|

一方面，对于任意 $t\in T$，直接验证可知，由

$$f(a)=at-ta$$

所确定的 f 是一个广义导子，特称之为内广义导子。

另一方面，零广义导子，即将 A 中元都对应到零的广义导子，所确定的扩张 $U=N+M$ 显然是 A-子模 N 和 A-子模 M 的直和，这是因为子空间 M 依模运算(4)已经是 U 的 A-子模了。

注意到以上这两方面，作为定理 4.3.1 的推论，便得

定理 4.3.3 扩张U是可裂的$\Longleftrightarrow U$的广义导子是内的.

§4 代数的扩张与因子系

本节的内容和上一节是非常类似的.

本节中所有的代数都是在域F上的.

定义 4.4.1 说代数A是代数N借助代数B的一个扩张，如果N是A的理想而商代数$A/N\simeq B$.

说扩张A是可裂的，如果在A中存在一子代数B_1，使$A=N+B_1$(子空间的直和). 此时也说，代数A是理想N和子代数B_1的半直和.

当A是可裂的而有$A=N+B_1$时，易见代数$B\simeq B_1$. 与§3预理1平行的有

预理 1 代数A是N借助B的一个扩张而φ是代数A到B上的一个同态对应，则扩张A是可裂的$\Longleftrightarrow$存在代数B到A的一个同态对应ψ，使$\varphi\psi=1$. |

代数是向量空间添加乘法运算，因而代数的扩张必定伴随着向量空间的扩张. 但向量空间的扩张都是简单的，即都是可裂的，故研究代数的扩张着眼点应放在乘法运算上. 这和讨论代数模的扩张时把注意力集中在模运算上是一样的.

设代数A是N借助B的一个扩张，φ: $A\to B$是相应的一个同态对应，N是φ的核.

若把A看成向量空间的扩张，φ看成向量空间A到B上的同态对应，则依预理1(把A取作零乘代数，或依§3预理1，把A取作F)必存在B到A的对应ψ，有

$$\varphi\psi=1,\ \psi\in \mathrm{Hom}_F(B, A). \tag{1}$$

与§3中讨论广义导子相类似，我们来考察与代数乘法密切相关的

$$f(a, b)=\psi(ab)-\psi(a)\psi(b),\ \forall a,b\in B. \tag{2}$$

$f(a, b)$是$B\times B$到N的一个双线性函数. 这是因为

$$\varphi(\psi(ab)-\psi(a)\psi(b))=\varphi\psi(ab)-\varphi\psi(a)\cdot\varphi\psi(b)$$
$$=ab-ab=0,$$

故 $f(a, b)\in N$，其双线性性是容易验证的.

利用代数 B 和N的乘法结合律，由(2)还有

$$\psi((ab)c)=\psi(ab)\psi(c)+f(ab, c)$$
$$=\psi(a)\psi(b)\psi(c)+f(a, b)\psi(c)+f(ab, c),$$
$$\psi(a(bc))=\psi(a)\psi(bc)+f(a, bc)$$
$$=\psi(a)\psi(b)\psi(c)+\psi(a)f(b, c)+f(a, bc).$$

相减便得

$$f(ab, c)-f(a, bc)+f(a, b)\psi(c)-\psi(a)f(b, c)=0. \quad (3)$$

我们知道 $f(a, b)\in N$, $\psi(c)\in A$ 而 $c\in B$. 这样(3)中第三项（以及第四项）都是在扩张 A 中才有意义. 为了能够与 A 无关地来刻划 f，因而有可能反过来用 f 来构造扩张 A，和§3中类似，我们拟用下面极自然的方式把N加工成 B-双模：定义

$$\begin{aligned} n\circ b&=n\psi(b), \\ b\circ n&=\psi(b)n, \end{aligned} \qquad n\in N, b\in B. \quad (4)$$

然而(4)，在一般情况下不能使N成为 B-双模. 但是若假定 $N^2=0$（对于证明 Wedderburn 定理，这刚好是我们最感兴趣的情形)，则N确成为 B-双模. 这是因为此时有

$$(n\circ a)\circ b-n\circ(ab)=(n\psi(a))\psi(b)-n\psi(ab)$$
$$=-nf(a, b)=0.$$

类似地可得 $a\circ(b\circ n)=(ab)\circ n$ 等.

下面将把(4)中的 $n\circ b, b\circ n$ 简记作 nb, bn.

这样 f 便是 $B\times B$ 到 B-双模N的一个双线性函数，且有

$$f(ab, c)-f(a, bc)+f(a, b)c-af(b, c)=0, \forall a, b, c\in B. \quad (5)$$

这启示我们给出下面的

定义 4.4.2 设B是F上代数而N是B-双模.对应 $f:B\times B\to N$ 叫作一个因子系，如果

i) $f(a, b)$是双线性的；

ii) (5)成立.

这样，由N借助B的一个已知扩张A出发，在$N^2=0$的条件下、选定一个满足(1)的ψ，便可得一因子系f。特称之为A的与ψ相应的因子系。

同一扩张A的与ψ_i相应的因子系f_i，$i=1, 2$之间有什么关系呢？

首先说明一下，对同一扩张A所取的不同的ψ_i言，在$N^2=0$的前提下，它们依(4)把N加工成的B-双模是相同的，即是对$\forall n\in N, b\in B$有

$$n\psi_1(b)=n\psi_2(b), \psi_1(b)n=\psi_2(b)n,$$

这是因为$\psi_1(b)-\psi_2(b)\in N$而$N^2=0$的原故。这样同一扩张A确定一个B-双模而与ψ_i之选择无关。下面在与一个扩张A相联系的谈论B-双模N时就是指这个唯一确定的B-双模N。

由(2)知$f_i(a, b)=\psi_i(ab)-\psi_i(a)\psi_i(b), i=1,2$。相减后再利用(4)便有

$$\begin{aligned}(f_1-f_2)(a, b)&=(\psi_1-\psi_2)(ab)-\psi_1(a)\psi_1(b)+\psi_2(a)\psi_2(b)\\&=(\psi_1-\psi_2)(ab)+\psi_1(a)(\psi_2-\psi_1)(b)\\&\quad+(\psi_2-\psi_1)(a)\psi_2(b)\\&=aE(b)+E(a)b-E(ab),\end{aligned}$$

其中$E=\psi_2-\psi_1\in \mathrm{Hom}_F(B, N)$。

易见，对任意$E\in \mathrm{Hom}_F(B, N)$，

$$f(a, b)=aE(b)+E(a)b-E(ab) \qquad (6)$$

中的f都是因子系。这就使我们得到与§3中内广义导子相平行的概念。

定义 4.4.3 形如(6)的因子系叫作可裂因子系，其中B，N之意义如定义4.4.2。

这样，上面的讨论就证得下面的

定理 4.4.1 设代数A是N借助B的一个扩张，$\varphi: A\to B$是相应的同态对应，ψ_1, ψ_2满足(1)。与ψ_i相应的因子系是$f_i, i=1, 2$，则f_1-f_2是一个可裂因子系。

定理 4.4.2 代数A是N借助B的一个扩张。$\varphi: A\to B$是相

应的同态对应．$N^2=0$．f 是 A 的与 ψ 相应的因子系．此时有：f 是可裂因子系$\Longleftrightarrow$扩张 A 是可裂的．

证 "$\Leftarrow$"．已知扩张 A 是可裂的，即 $A=N+B_1$，其中 B_1 是 A 的子代数且 $N\cap B_1=0$．由预理 1 知，存在有代数 B 到 A 的同态对应 ψ_1，使 $\varphi\psi_1=1$．利用 ψ_1 是代数的同态对应，直接由定义式(2)便知，ψ_1 所确定的因子系 $f_1=0$．

另一方面，由上面定理 4.4.1 知

$$f(a,b)=f(a,b)-f_1(a,b)=aE(b)+E(a)b-E(ab),$$

其中 $E\in \mathrm{Hom}_F(B,N)$．即知 f 是可裂的．

"$\Rightarrow$"．已知 f 是可裂的，则有 $E\in \mathrm{Hom}_F(B,N)$，使

$$f(a,b)=aE(b)+E(a)b-E(ab). \tag{7}$$

设 $\psi_1=\psi+E$，则 $\psi_1\in \mathrm{Hom}_F(B,A)$．注意到 φ 之核是 N，可得 $\varphi E=0$，故

$$\varphi\psi_1=\varphi\psi+\varphi E=1+0=1,$$

即 ψ_1 满足(1)．利用(4)，(2)，(7)，知

$$\begin{aligned}\psi_1(ab)-\psi_1(a)\psi_1(b)&=\psi(ab)+E(ab)-(\psi(a)\\&\quad+E(a))(\psi(b)+E(b))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=[\psi(ab)-\psi(a)\psi(b)]-[aE(b)+E(a)b-E(ab)]-E(a)E(b)\\&=f(a,b)-[aE(b)+E(a)b-E(ab)]-E(a)E(b)\\&=-E(a)E(b)=0.\end{aligned}$$

最末一个等号是根据假设 $N^2=0$．这样 ψ_1 是代数 B 到 A 的同态对应．但又知 $\varphi\psi_1=1$，由预理 1 知扩张 A 是可裂的．∎

与§3 中代数模的情况相比，在这里我们没有讨论由因子系构造代数扩张这一面．而在讨论扩张的因子系时，也只是在 $N^2=0$ 这个条件下．然而对于本章的主要目的这些是够用的了．

§5 Wedderburn-Мальцев 定理

首先在前几节的基础上，证明下面这个关于分离代数的重要定理．

定理 4.5.1 (Whitehead 预理) 设 A 是特征为零的域 F 上的半单代数. T 是任意的 A-双模.

i) 任意广义导子 $g: A\to T$ 都是内广义导子;

ii) 任意因子系 $f: A\times A\to T$ 都是可裂因子系.

证 由定理 4.2.3,半单代数 A 有 F-基 $\{a_1, \cdots, a_m\}$ 及 $\{a_1', \cdots, a_m'\}$ 且满足条件

$$\sum_i a_i' a_i = 1, \tag{1}$$

$$a_i a = \sum_j \lambda_{ij}(a) a_j,\quad \lambda_{ij}(a)\in F \Rightarrow a a_i' = \sum_j \lambda_{ji}(a) a_j',\quad \forall a\in A. \tag{2}$$

先证 i). 令

$$t = \sum a_i' g(a_i)\quad (\text{或 } t' = \sum_i g(a_i') a_i),$$

则对 $\forall a\in A$,

$$\begin{aligned} at - ta &= \sum_i a a_i' g(a_i) - \sum_i a_i' g(a_i) a \\ &= \sum_i a a_i' g(a_i) - \sum_i a_i' (g(a_i a) - a_i g(a)) \\ &= \sum_i a a_i' g(a_i) - \sum_i a_i' g(a_i a) + \sum_i a_i' a_i g(a) \\ &= \sum_{i,j} \lambda_{ji}(a) a_j' g(a_i) - \sum_{i,j} a_i' \lambda_{ij}(a) g(a_j) + \Big(\sum_i a_i' a_i\Big) g(a) \\ &= g(a). \end{aligned}$$

即 g 是内广义导子.

其次证 ii). 令

$$E: a\to \sum_i f(a, a_i') a_i \Big(\text{或 } E': a\to \sum_i a_i' f(a_i, a)\Big),\quad \forall a\in A.$$

利用 f 的双线性性,易见 $E\in \mathrm{Hom}_F(A, T)$, 且

$$aE(b)+E(a)b-E(ab)=\sum_i af(b,a_i')a_i$$

$$+\sum_i f(a,a_i')a_ib-\sum_i f(ab,a_i')a_i$$

$$=\sum_i [f(ab,a_i')-f(a,ba_i')+f(a,b)a_i']a_i+\sum_i f(a,a_i')a_ib$$

$$-\sum_i f(ab,a_i')a_i$$

$$=-\sum_i f(a,ba_i')a_i+f(a,b)\sum_i a_i'a_i+\sum_i f(a,a_i')a_ib$$

$$=f(a,b).$$

上面最后一个等号的依据是：利用(2)，第一、三项互相抵销，利用(1)，第二项就是 $f(a,b)$. 故 f 是可裂的. ∎

设 A 是结合代数，而 $a, b\in A$. 我们将要把 $b+ab$ 简记作 $(1+a)b$，而把 $b+ba$ 简记作 $b(1+a)$，即规定

$$(1+a)b=b+ab,\ b(1+a)=b+ba,\ a,b\in A.$$

此时并不假定 A 中有单位元 1. 这样 $1+a$ 在代数 A 中是没有意义的，但 $(1+a)b$ 或 $b(1+a)$ 的意义是清楚的. 直接验证易知

$$(1+a)(1+b)c=(1+a+b+ab)c,$$

$$c(1+a)(1+b)=c(1+a+b+ab).$$

若 $n\in A$ 是幂零元，$n^p=0$，则对 A 中任意之 x，有

$$(1-n)(1+n+\cdots+n^{p-1})x=(1+n+\cdots+n^{p-1})(1-n)x$$

$$=(1-n^p)x=x,$$

$$x(1-n)(1+n+\cdots+n^{p-1})=x(1+n+\cdots+n^{p-1})(1-n)$$

$$=x(1-n^p)=x.$$

由于这些等式，很自然地约定 $(1-n)^{-1}=(1+n+\cdots+n^{p-1})$. 这样很容易证明，幂零元素 n 所确定的对应

$$\varphi:\ A\to A$$

$$x\mapsto(1-n)x(1-n)^{-1}=(1-n)x(1+n+\cdots+n^{p-1}),$$

是代数 A 的一个自同构. 并称代数 A 的这种形式的自同构为 A 的

内自同构.

现在可以叙证本章的主要结果——非半单代数的主要结构定理.

定理 4.5.2 (Wedderburn-Мальцев 定理) 设A是特征为零的域F上的有限结合代数,N是它的幂零根,则

i) (Wedderburn 主要定理) 存在有A的半单子代数S, 使$A=N+S$(半直和);

ii) (Мальцев 唯一性定理) 若S_i是A的半单子代数并且$A=N+S_i$(半直和), $i=1,2$, 则存在一元素$n\in N$,使得$S_1=(1-n)S_2(1-n)^{-1}$.

证 i) 对A的维数作归纳法. 假定对于维数小于A的所有代数, i)是成立的. 今证 i)对A也成立.

如果$N^2=0$, 则由上面定理 4.5.1 及定理 4.4.2 便知N借助于半单代数B的扩张A是可裂的,即$A=N+S$(半直和), 而$S\simeq B$是半单的子代数.

如果$N^2\neq 0$,则$(A/N^2:F)<(A:F)$. 又由于A/N^2之理想N/N^2是幂零的,且

$$(A/N^2)/(N/N^2)\simeq A/N$$

是半单的, 故N/N^2是A/N^2的幂零根. 因而依归纳法假设, 有子代数S_1/N^2, 使

$$A/N^2=S_1/N^2+N/N^2(\text{半直和}),$$

也就是

$$A=S_1+N,\ S_1\cap N=N^2. \tag{3}$$

其中子代数S_1是S_1/N^2在A中的完全逆象.

因为$N\neq N^2$, 故$S_1\neq A$. 由$S_1/N^2\simeq A/N$是半单的, 知N^2是S_1的幂零根. 再用归纳法假设,则必存在S_1的子代数S,使

$$S_1=S+N^2(\text{半直和}). \tag{4}$$

把(3),(4)结合在一起便有$A=S+N$(半直和).

ii) 设$A/N=B$. 而φ是代数A到B的自然同态对应. 对于给定的这两个子代数S_1,S_2,依§4 预理 1,必有代数B到A的同态

对应 ψ_i，使 $S_i=\psi_i B$，$\varphi\psi_i=1$，$i=1,2$。

规定

$$\begin{aligned} nb&=n\psi_2(b), \\ bn&=\psi_1(b)n. \end{aligned} \quad b\in B, n\in N. \tag{5}$$

由于 ψ_i 是代数的同态对应，故N关于模运算(5)构成B-双模.

令

$$f:b\to\psi_1(b)-\psi_2(b), b\in B,$$

则 $f\in\mathrm{Hom}_F(B,A)$，由

$$\varphi(\psi_1(b)-\psi_2(b))=\varphi\psi_1(b)-\varphi\psi_2(b)=b-b=0,$$

故 $f(b)\in N$，即 $f\in\mathrm{Hom}_F(B,N)$。另外我们还有

$$\begin{aligned} f(ab)&=\psi_1(ab)-\psi_2(ab)=\psi_1(a)\psi_1(b)-\psi_2(a)\psi_2(b) \\ &=\psi_1(a)[\psi_1(b)-\psi_2(b)]+[\psi_1(a)-\psi_2(a)]\psi_2(b) \\ &=\psi_1(a)f(b)+f(a)\psi_2(b)=af(b)+f(a)b. \end{aligned}$$

最后一个等号是根据(5)。这样，$f:B\to N$是一个广义导子.

由定理 4.5.1，知 f 必是一个内广义导子，因而存在元素 $n\in N$，使得

$$f(b)=\psi_1(b)-\psi_2(b)=bn-nb=\psi_1(b)n-n\psi_2(b), \forall b\in B.$$

上式可改写成

$$\psi_1(b)(1-n)=(1-n)\psi_2(b), \forall b\in B. \tag{6}$$

因为 n 是幂零元，若 $n^p=0$，并令 $(1-n)^{-1}=(1+n+\cdots+n^{p-1})$，则有

$$\psi_1(b)=(1-n)\psi_2(b)(1-n)^{-1}, \forall b\in B.$$

但 $\psi_i B=S_i$，上式就是

$$S_1=(1-n)S_2(1-n)^{-1},$$

故得 ii)。▌

习　题

1．用迹函数的方法证明N-半单代数是单代数的直和.

2．设A为特征零的域F上的有限结合代数，N是A的幂零根，S是A的

半单子代数，则必存在A的半单子代数P，使得$A=N+P$（半直和）且$S\subseteq P$。

3．设F是任意域，决定F上维数$\leqslant 2$的一切代数。

第五章　一类局部有限代数的 Wedderburn 结构理论

在前几章中我们介绍了有限结合代数的 Wedderburn 结构理论. 在本章以及下面的几章中将把这些结果推广到无限(维)代数或者环上去. 为此目的, 常不得不对环或代数要求某些"有限条件". 在§1中介绍关于代数的一类有限条件. 在§§3—5中对一类无限代数证明 Wedderburn 结构定理.

§1　关于代数的有限条件

在本节中我们介绍一种类型的有限条件. 在下一章§1中将介绍另一类有限条件.

用字母 P 表示一个代数可能具有的性质, 而用 P-代数表示具有性质 P 的代数. 例如若用 P 表示有限性, 则 P-代数就是指有限代数; 若 P 表示幂零性或有限及单性, 则 P-代数就是幂零代数或有限单代数.

定义 5.1.1　设 A 是域 F 上代数, 不一定是有限维的, 说 A 是局部 P-代数, 如对于 A 中任意有限子集 X, 都存在 A 的一个 P-子代数 $B\supseteq X$.

例如, 说 A 是局部幂零代数(取 P 为幂零性)就是指对 A 中任意有限个元素 $a_1,\cdots,a_n$, 必有 A 的一个幂零子代数 B, 有 $a_i\in B$, $i=1,\cdots,n$. 由于幂零代数的子代数也是幂零代数, 上面这个条件等于说子代数 $\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$ 是幂零的.

又例如, 说 A 是局部有限代数(取 P 为有限性)就是指 A 中任意有限个元素 $a_1,\cdots,a_n$ 生成的子代数 $\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$ 是有限维的.

定义 5.1.2　说代数 A 是局部理想有限代数, 若 A 中任意有

限子集X所生成的理想(X)是有限维的.

显然局部理想有限代数一定是局部有限代数。

对于给定的代数A，取$a\in A$，考察

$$a, a^2, \cdots, a^n, \cdots.$$

显然，或者$\exists n$，使a^n可用$a, a^2, \cdots, a^{n-1}$，F-线性表示，这就是说a满足F上的一个n次(缺常数项)多项式，此时称a为A的**代数元**；或者对任意n，$a, \cdots, a^n$都是F-无关的，此时称a为A的**超越元**. 易见，a是代数元当且仅当$\langle a\rangle$是有限维的子代数. 这样便引出下面定义中的术语.

定义 5.1.3 说A是代数的代数，如果A的每一元素都是代数元，也就是A中任一元素a生成的子代数$\langle a\rangle$必是有限的.

局部有限代数当然是代数的代数. 它的逆命题是下面著名的

Курош 问题：代数的代数是局部有限的吗？

这可以说是由群论启示提出的第一个重要的、关于代数的问题. 我们知道群论中有著名的

Burnside 问题：周期群是局部有限的吗？即是说，一个群G，若已知它的每一个元素都生成有限子群，那末它的任意有限子集生成的子群是有限吗？

这样我们看到关于结合代数的Курош问题和关于群的 Burnside 问题是完全类似的.

Курош 问题和 Burnside 问题都有 Голод 的反例说明它们是不成立的。关于附加某些限制条件的 Курош 问题以及 Голод 反例将在以后讨论.

在本节最后，我们给出下面这个

定理 5.1.1 设A是域F上结合代数，N是A的理想. 若N和A/N都是局部有限代数，则A也是局部有限代数.

证 设$\bar{A}=A/N$而A中元素a所在的剩余类记作$\bar{a}$.

任取A中有限个元素$a_1, \cdots, a_n$，则由$\bar{A}$的局部有限性，知$\langle\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_n\rangle$是一个有限代数. 设$\bar{b}_1, \cdots, \bar{b}_m$是它的一个基. 不妨设(需要时可扩大原给有限子集$\{a_1, \cdots, a_n\}$)$a_1, \cdots, a_n$中已包

括 $b_1,\cdots,b_m$. 这样

$$a_ia_j=\sum_k \alpha_{ij}^k a_k+x_{ij},\ \alpha_{ij}^k\in F,\ x_{ij}\in N,\ \forall i,j,k. \qquad (1)$$

令

$$Y=\{x_{ij},a_kx_{ij},x_{ij}a_k,a_kx_{ij}a_l,i,j,k,l=1,\cdots,n\},$$

则 Y 是 N 中有限子集. 由 N 的局部有限性知 $\langle Y\rangle$ 是有限子代数.

设 M 是由 $a_1,\cdots,a_n$ 支撑的子空间. M 当然是有限维的. 今证有限维子空间

$$M+\langle Y\rangle(\text{向量子空间的和}) \qquad (2)$$

是子代数. 为此,依(1)只需证

$$a_l\langle Y\rangle\subseteq\langle Y\rangle,\langle Y\rangle a_l\subseteq\langle Y\rangle,\ \forall l, \qquad (3)$$

而欲证(3),只需证: 对任意 $y\in Y$,

$$a_ly\in\langle Y\rangle,\ ya_l\in\langle Y\rangle,\ \forall l, \qquad (4)$$

而利用(1),这是易证的. 例如当 y 取 a_kx_{ij} 时,有

$$a_l(a_kx_{ij})=(a_la_k)x_{ij}=\left(\sum_s \alpha_{lk}^s a_s+x_{lk}\right)x_{ij}$$

$$=\sum_s \alpha_{lk}^s a_sx_{ij}+x_{lk}x_{ij}\in\langle Y\rangle,$$

$$(a_kx_{ij})a_l\in Y\subseteq\langle Y\rangle.$$

这样得证 $M+\langle Y\rangle$是有限子代数. 但另一方面,

$$\langle a_1,\cdots,a_n\rangle\subseteq M+\langle Y\rangle,$$

故得$\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$是有限子代数. ▎

§ 2 全直和、直和、亚直和

在第一章中我们讨论了有限个代数的直和. 然而在研究无限代数或一般环时,我们需要无限个代数或环的直和概念.

设 $A_\alpha,\alpha\in W$,是域 F 上任意代数(即不一定是有限代数),其中 W 是足码的一个非空集合,可以是有限或无限的. 考察以 W

为定义域，在 $\alpha\in W$ 处从 A_α 取值的一切函数 f，亦即

$$f(\alpha)\in A_\alpha,\ \ \forall\alpha\in W.$$

命 A 代表这样函数的全体．在 A 中如下引入运算：对任意 f，$g\in A$，规定

$$\begin{aligned}&(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha),\\&fg(\alpha)=f(\alpha)\cdot g(\alpha),\quad\forall\alpha\in W,\ \forall a\in F.\\&(af)(\alpha)=a\cdot f(\alpha),\end{aligned}$$

当然，对取定的 α 言，$f(\alpha)$，$g(\alpha)$应在代数 A_α 中去运算．容易验证，A 关于这些运算作成域 F 上的一个代数．易见，当所有 A_α 都是结合代数时 A 也是结合的；当所有的 A_α 都是 Lie 代数时，A 也是 Lie 代数．

这样作出的代数 A 叫作代数 A_α，$\alpha\in W$，的**全直和**，并记作 $\prod\limits_{\alpha\in W}A_\alpha$．所以用这样的记法，是因为 A 的元素 f 可以看成集 A_α的卡氏积$\prod\limits_{\alpha\in W}A_\alpha$ 中的元素．如果把卡氏积$\prod\limits_{\alpha\in W}A_\alpha$ 中的元素看作是"向量"，则上面运算的意义就是"向量"的运算按其分量去进行．

易见，对任意取定的 $\alpha\in W$，满足下面条件

$$f(\beta)=0,\ \forall\beta\neq\alpha,$$

的一切函数 f（或者说，对一切 $\beta\neq\alpha$，β-分量都为零的"向量"）的全体$\bar{A}_\alpha$，是 A 的一个子代数，并且有

$$\begin{aligned}&\bar{A}_\alpha\cong A_\alpha,\\&f\mapsto f(\alpha),\forall f\in\bar{A}_\alpha.\end{aligned}$$

如果把 A_α 和 $\bar{A}_\alpha$ 等同起来，可把 A_α 就看作 A 的子代数．易见 A_α 还是 A 的理想．

下面我们来考察全直和 A 中一些特殊的子代数．

设 B 是 A 中只在有限个 α 上取非零值的函数 f 的全体，或者用"向量"的语言说就是只有有限个分量不为零的"向量"全体．易见 B 是 A 的子代数，且是由 A 的理想 A_α，$\alpha\in W$，生成的子代数．把 B 称为代数 A_α，$\alpha\in W$，的**直和**，并记作$\sum\limits_{\alpha\in W}\oplus A_\alpha$．

当 W 是有限集时，显然全直和与直和是一回事，这里的直和概念和第一章§4中定义的直和概念是一回事。

当有无限多个 $A_\alpha\neq 0$ 时，$A\neq B$，因而全直和与直和是不同的两个概念。这是因为，若取 $0\neq a_\alpha\in A_\alpha$，则 A 中元素 $f:f(\alpha)=a_\alpha$ 不属于 B。

上面由给定代数 $A_\alpha,\alpha\in W$，出发硬造出的直和 $B=\sum\limits_{\alpha\in W}\oplus A_\alpha$ 与其中的子代数 $A_\alpha(=\bar{A}_\alpha)$ 之间显然有下列关系

（一）A_α 是 B 的理想，$\forall\alpha$。

（二）B 中任意元素 x 可表成

$$x=\sum_{i=1}^{n}a_{\alpha_i},\quad \alpha_i\in W,\quad a_{\alpha_i}\in A_{\alpha_i},\quad \forall i.$$

（三）（二）中表示法是唯一的，即若还有

$$x=\sum_{j=1}^{m}a'_{\beta_j},\quad \beta_j\in W,\quad a'_{\beta_j}\in A_{\beta_j},\quad \forall j,$$

且 $a_{\alpha_i}\neq 0,\forall i,a'_{\beta_j}\neq 0,\forall j$，则必有 $n=m$

$$\alpha_i=\beta_{\pi(i)},\ a_{\alpha_i}=a'_{\beta_{\pi(i)}},\forall i,$$

其中 π 是某一 n 元置换。

（三）$'$ $A_\alpha\cap\sum\limits_{\substack{\beta\neq\alpha\\ \beta\in W}}A_\beta=\{0\},\quad \forall\alpha\in W,$

其中 $\sum\limits_{\beta\in V}A_\beta$ 表示由 $A_\beta,\beta\in V,V=W\backslash\{\alpha\}$，的元素作成的一切有限和，也就是子向量空间 $A_\beta,\beta\in V$，的和。

容易看出（三）和（三）$'$是等价的。

反过来，若给定代数 B 及其子代数 $A_\alpha,\alpha\in W$，满足上面的（一）、（二）、（三）或（一）、（二）、（三）$'$，则和第一章§4中有限个代数的直和的情况完全类似，可知这个给定的代数 B 和上面定义的直和 $\sum\limits_{\alpha\in W}\oplus A_\alpha$ 是同构的。因而这两种说法（即外直和与内直和）是完全

一样的.

任意多个代数的直和显然是有限个代数的直和的自然推广，容易证明

定理 5.2.1 $\left(\sum_{\alpha\in W}\oplus A_\alpha\right)\oplus\left(\sum_{\beta\in V}\oplus A_\beta\right)=\sum_{\gamma\in W\cup V}\oplus A_\gamma$. ∎

现在来看全直和 $A=\prod_{\alpha\in W}A_\alpha$ 的另一些子代数. 设 B 是 A 的子代数，考虑对应

$$\varphi_\alpha:\ B\to A_\alpha$$
$$f\mapsto f(\alpha),\ \forall f\in B.$$

注意到 A 中元素的运算是按“分量”进行的，故得 φ_α 是代数 B 到 A_α 内的一个同态对应. 称 φ_α 为 B 到 A_α 的投影.

定义 5.2.1 如果对任意 $\alpha\in W$，都有投影 φ_α 是 B 到 A_α 上的对应(亦即 $B\varphi_\alpha=A_\alpha$)时，则称子代数 B 为代数 A_α，$\alpha\in W$，的亚直和.

易见 A_α 的全直和、直和都是 A_α 的亚直和.

亚直和的概念也可以从一个代数的内部去刻划.

设 B 是 $A_\alpha,\alpha\in W$ 的亚直和，投影 φ_α 的核为 I_α，考察理想

$$I=\bigcap_{\alpha\in W}I_\alpha.$$

若 $f\in I$，则 $f\in I_\alpha,\forall\alpha$，故 $f(\alpha)=0,\forall\alpha$，即 $f=0$. 这样知

$$\bigcap_{\alpha\in W}I_\alpha=\{0\}.$$

反过来，任给定一个代数 B 及其中的理想 $I_\alpha,\alpha\in W$，且知 $\bigcap_{\alpha\in W}I_\alpha=\{0\}$. 令

$$A_\alpha=B/I_\alpha=B\varphi_\alpha,\ \forall\alpha,$$

其中 φ_α 是代数 B 到其商代数 A_α 上的自然同态对应. 作全直和 $A=\prod_\alpha A_\alpha=\prod_\alpha(B/I_\alpha)$. 规定

$$\varphi:\ B\to A=\prod_\alpha(B\varphi_\alpha)$$
$$b\mapsto f_b{:}\,f_b(\alpha)=b\varphi_\alpha,\ \forall\alpha,$$

即是把 B 的元素 b 对应到由 b 在 φ_α 下的象所组成的“向量”上去.

φ 是代数 B 到 A 内的一个同态对应，因为有

$$f_{b+c}(\alpha)=(b+c)\varphi_\alpha=b\varphi_\alpha+c\varphi_\alpha=f_b(\alpha)+f_c(\alpha)$$
$$=(f_b+f_c)(\alpha),$$
$$f_{bc}(\alpha)=(bc)\varphi_\alpha=(b\varphi_\alpha)(c\varphi_\alpha)=f_b(\alpha)\cdot f_c(\alpha)$$
$$=(f_b\cdot f_c)(\alpha)$$

等. φ 还是 B 到 A 内的一一对应，这是因为，若 $b\in B$ 且 $b\varphi=0$，则 $f_b(\alpha)=b\varphi_\alpha=0, \forall\alpha$，所以 $b\in I_\alpha, \forall\alpha$. 但已知 $\bigcap_\alpha I_\alpha=0$，故得 $b=0$. 这样

$$B\cong B\varphi\subseteq A.$$

$B\varphi$ 恰是 A_α 的一个亚直和. 这是因为 $B\varphi$ 在 A_α 的投影象刚好是 $B\varphi_\alpha=A_\alpha$. 这样，若我们把 B 和 $B\varphi$ 等同起来，B 就是 $A_\alpha=B\varphi_\alpha=B/I_\alpha$ 的一个亚直和了。即得

定理 5.2.2 设 I_α, $\alpha\in W$，是代数 B 的一些理想. 则 B 是代数 $A_\alpha=B/I_\alpha$, $\alpha\in W$，的一个亚直和当且仅当 $\bigcap_{\alpha\in W} I_\alpha=\{0\}$. ▎

上面是就代数介绍了全直和、直和、亚直和的概念. 对于其他代数系统，例如环、群、模等，可以完全平行的去定义，因而以后我们也将谈论到如环的直和、亚直和等.

我们知道，当一个代数(或环) A 可表成 $A_\alpha, \alpha\in W$ 的直和后，A 的结构就可完全由 A_α 的结构来刻划了. 然而关于亚直和情况就不同了. 这可由下面的例 2—3 中看出.

例 1 设 A_n 为域 F 上主对角线为零的上三角 n 阶矩阵组成的代数. 作它们的直和 $\sum_{n=1}^{\infty}\oplus A_n=A$. 由于每一 A_n 是幂零指数为 n 的幂零代数，易见代数 A 是幂零元素的，是局部有限的，是局部幂零的，然而 A 本身不是幂零的.

这个例子告诉我们，对于无限代数言，幂零元素代数不一定是幂零代数. 在什么条件下幂零元素代数是幂零代数或局部幂零代数是引起很多讨论的问题. 其中某些结果将在以后介绍.

例 2 设 Z 为整数环. 欲把 Z 表成一些环的亚直和，依定理

5.2.2，只要取一组交为零的理想即得.

取 $I_n=(p_n)$，其中 p_n 是第 n 个正素数. 易见 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n=\{0\}$.

故知环 Z 是 $Z_2, Z_3, Z_5, \cdots$ 的一个亚直和，其中 $Z_p=Z/(p)$ 为 p 元有限域.

若取定素数 p 而令 $I'_n=(p^n)$. 易见 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I'_n=\{0\}$. 故得整数环 Z 是 $Z/(p^n), n=1,2,\cdots$，的亚直和.

这样我们看到同一个环可表成性质上完全不同的两类环（有限域和有零因子的环）的亚直和.

例 3 把域 F 看成域 F 上的一维代数，考虑 n 个 F 作成的直和 $A=F\oplus\cdots\oplus F$ 并把 A 中的元素记作 $(a_1,\cdots,a_n)$，$a_i\in F$. 取 A 中一切形如 $(a,\cdots,a), a\in F$，的元素全体作成的子代数 B，则易见 B 是 n 个代数 $F,\cdots,F$ 的亚直和且 $B\simeq F$ 是一维可除代数. 另一方面，A 本身当然也是 n 个 F 的一个亚直和，而 A 是有零因子的代数.

这样我们看到同是某些环的亚直和，它们的性质可能有很大差别.

应该指出，A_α 的亚直和和 A_α 之间还是有些性质互相传递的，如下面这个易证的

定理 5.2.3 代数（或环）A 是 $A_\alpha, \alpha\in W$，的一个亚直和，则 A 是交换的 $\Longleftrightarrow$ 每一个 $A_\alpha, \alpha\in W$，是交换的. ▌

最后我们给出下面将要用到的两个简单的

定理 5.2.4 设代数 $A=\sum_{\alpha\in W}\oplus A_\alpha$ 而每一 A_α 为单代数（指 $A^2\neq 0$ 且无真理想者），则 A 的任意理想 B 必是某些 A_α 的直和，随之理想 B 必是 A 的直和项（指 $\exists B'$，使 $A=B\oplus B'$）.

证 设 B 在 A_α 中的投影象为 B_α，则由 B 是 A 的理想，易见 B_α 是 A_α 的理想. 但 A_α 是单的，故若 $B_\alpha\neq 0$，则 $B_\alpha=A_\alpha$. 设 $V=$

$\{\alpha\in W \mid B_\alpha\neq 0\}$. 显然，$B\subseteq \sum_{\alpha\in V}\oplus A_\alpha$. 另一方面，对任意$\alpha\in V$，有

$$A_\alpha B = A_\alpha B_\alpha = A_\alpha^2 = A_\alpha,$$

故 $A_\alpha\subseteq B$. 因而 $B=\sum_{\alpha\in V}\oplus A_\alpha$. 随之

$$A=\sum_{\alpha\in V}\oplus A_\alpha\oplus\sum_{\beta\in W\setminus V}\oplus A_\beta = B\oplus\sum_{\beta\in W\setminus V}\oplus A_\beta,$$

即 B 是 A 的直和项. ▌

定理 5.2.5 设代数 $A=\sum_{\alpha\in W}A_\alpha$，每一 A_α 都是 A 的理想而本身是单代数且 $A_\alpha\neq A_\beta$, $\alpha\neq\beta$，则必有 $A=\sum_{\alpha\in W}\oplus A_\alpha$. ▌

§ 3 代数的 Levitzki 根

把有限结合代数的幂零根的概念推广到一般的环与代数上去.这是本世纪四十年代许多研究工作的主题. 如 Baer 根、Brown-McCoy 根、Levitzki 根以及最重要的 Jacobson 根等都是. 这些将在以下各章内去讨论. 在本节中将介绍代数的 Levitzki 根或局部幂零根.

预理 1 局部幂零代数的子代数和同态象也是局部幂零的. ▌

预理 2 设 A 是域 F 上结合代数，N 是 A 的理想. 若 N 和 A/N 都是局部幂零的，则 A 也是局部幂零的.

证 任取 A 中有限个元素 $a_1,\cdots,a_n$，则由 $\bar{A}$ 的局部幂零性，知 $\langle\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n\rangle$ 是幂零代数. 因而有正整数 S，使

$$\bar{a}_{i_1}\cdots\bar{a}_{i_s}=\bar{0},\ i_j=1,\cdots,n.$$

令 $X=\{a_{i_1}\cdots a_{i_s}, i_j=1,2,\cdots,n,\forall j\}$，则 X 是 N 中一有限子集. 由 N 的局部幂零性知 $\langle X\rangle$ 是幂零子代数，因而有正整数 t，使 X 中任意 t 个元素之积为零。这样得任意 st 个 a_j, $j=1,\cdots,n$，之积

必为零，即$\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$是幂零的. ▎

作为预理 2 的推论有

预理 3 代数A中任意两个(因而任意有限个)局部幂零理想之和仍是局部幂零理想. ▎

预理 4 代数A的所有局部幂零理想$B_\alpha,\alpha\in W$，之和N是A的局部幂零理想.

证 首先再提一下，所有理想$B_\alpha,\alpha\in W$，的和是指从集$\bigcup_{\alpha\in W}B_\alpha$中任取有限个元素所作的和的全体$N$. 显然$N$仍是一个理想. 在$N$中任取一个有限子集$X$，则必有有限个$B_{\alpha_i},i=1,\cdots,n$，使

$$X\subseteq B_{\alpha_1}+\cdots+B_{\alpha_n}=B.$$

依预理 3，B是局部幂零的，因而$\langle X\rangle$是幂零子代数. 故N是局部幂零的. ▎

预理 5 设B是代数A的局部幂零单侧理想，则B必包含在A的局部幂零理想中.

证 不妨设B是局部幂零左理想. 考察A中含B的最小理想$B+BA$. 今证此理想是局部幂零的. 为此只需证明对任意有限子集

$$Y=\{b_i,b_ia_i,i=1,\cdots,n\},$$

其中$b_i\in B,a_i\in A,\forall i$，$\langle Y\rangle$是幂零的. 令

$$Z=\{b_i,a_ib_j,i,j=1,\cdots,n\},$$

则Z是局部幂零左理想B的有限子集. 因而$\langle Z\rangle$是幂零的. 设其幂零指数为m，则Z中任意m个元素的积必是零. 此时Y中任意m个元素的积，例如

$$(b_ia_i)(b_ja_j)b_k\cdots=b_i(a_ib_j)(a_jb_k)\cdots$$

也必是零. 故$\langle Y\rangle^m=0$. 即证得$B+BA$是局部幂零理想. ▎

定理 5.3.1 设A是域F上结合代数，则

(一) A中必存在唯一最大局部幂零理想N，它包含A中一切局部幂零单侧理想，

（二）A/N 中没有异于零的局部幂零单侧理想.

证　由预理 4,5 得(一),由预理 2,5 得(二). |

和有限维情形完全类似,有了定理 5.3.1，很自然地引入下面

定义 5.3.1　称代数 A 的唯一最大局部幂零理想 N 为 A 的局部幂零根或 Levitzki 根. Levitzki 根为零理想的代数 A 叫作 Levitzki 半单代数或局部幂零半单代数.

这样定理 5.3.1 可改述成

定理 5.3.1　设 A 是 F 上结合代数,则

（一）A 的 Levitzki 根是存在的，

（二）A/N 是 Levitzki 半单代数.

以上的讨论说明，任意代数的 Levitzki 根是有限代数幂零根的一个很自然的推广.

§ 4　一类局部有限代数

为了刻划我们要讨论的这类局部有限代数，需要下面的概念.

定义 5.4.1　说代数 A 的子代数 B 是 A 的次理想，并记作 $B \operatorname{si} A$,如果存在子代数链

$$B=B_0\subseteq B_1\subseteq\cdots\subseteq B_n=A,$$

其中 n 是自然数而 B_i 是 B_{i+1} 的理想,$i=0,\cdots,n-1$. 这样的有限长的子代数链,称作次理想链,或更详细些，由 B 到 A 的次理想链.

这是 1939 年 Wielandt 对于群引入的次正规子群在代数中的平行概念. 易见每一理想都是次理想. 次理想是介于子代数和理想之间的一个概念.

定义 5.4.2　说代数 A 的子代数 B 是 A 的局部次理想，记作 $B \operatorname{lsi} A$,如果对 A 的任意有限子集 X,有 $B \operatorname{si}\langle B,X\rangle$,其中 $\langle B,X\rangle$ 表示 $B\cup X$ 生成的子代数.

定义 5.4.3 说特征为零的域F上的局部有限结合代数A具有性质W，并记作W-代数，如果对A的任意有限子集X，都有一有限子代数B，有性质

$$X \subseteq B \quad 且 \quad B \text{ lsi } A.$$

易见局部理想有限代数必是W-代数. 这样W-代数是介于局部理想有限代数和局部有限代数之间的一类代数.

下面讨论次理想、局部次理想的一些简单性质.

命题 1 若B是代数A的次理想且$B^2=B$，则B是A的理想.

证 由于$B \text{ si } A$，故有次理想链

$$B=B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq B_{n-1} \subseteq B_n = A,$$

用归纳法来证明B是B_i中的理想，$i=1,\cdots,n$。当$i=1$时这是显然的。设B是B_j中的理想，今证B也是B_{j+1}中的理想. 这可由

$$BB_{j+1}=(BB)B_{j+1}=B(BB_{j+1}) \subseteq BB_j \subseteq B,$$

以及类似地$B_{j+1}B \subseteq B$得到. 这样B是每一B_i，特别是$B_n=A$中的理想. ▎

命题 2 代数A有两子代数$B \supseteq C$。若知$C \text{ si } B$且$B \text{ lsi } A$，则必有$C \text{ lsi } A$。

证 设X是A的任意有限子集，需证

$$C \text{ si} \langle C,X \rangle.$$

由于$B \text{ lsi } A$，故$B \text{ si} \langle B,X \rangle$，即有次理想链：

$$B=B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq B_n = \langle B,X \rangle.$$

另一方面，已知$C \text{ si } B$，故有次理想链：

$$C=C_0 \subseteq \cdots \subseteq C_m = B,$$

把它们接在一起便得C到$\langle B,X \rangle$的次理想链.

注意到$C \subseteq \langle C,X \rangle \subseteq \langle B,X \rangle$，用$D=\langle C,X \rangle$去交这个次理想链，便有

$$\begin{aligned} C &= C_0 \subseteq C_1 \cap D \subseteq \cdots \subseteq C_m \cap D \\ &= B_0 \cap D \subseteq B_1 \cap D \subseteq \cdots \subseteq B_{n-1} \cap D \subseteq D. \end{aligned}$$

易见这是 C 到 $D=\langle C,X\rangle$ 的一个次理想链，故有 C si $\langle C, X\rangle$，即C lsi$A$. ∎

命题 3 若 B 是 A 的有限(维)局部次理想且 B 不是幂零代数，则 B 含有 A 的非零理想.

证 考察子代数链

$$B=B^{(1)}\supseteq B^{(2)}\supseteq\cdots\supseteq B^{(n)}, \tag{1}$$

其中 $B^{(i+1)}=B^{(i)}B^{(i)}$. 由于 B 不是幂零的且是有限维的，故可认定(1)中的 $B^{(n)}$ 有性质$B^{(n)}B^{(n)}=B^{(n)}\neq 0$，易见(1)是$B^{(n)}$到 B 的次理想链，故 $B^{(n)}$ si B.但已知 B lsi A. 依命题 2 知 $B^{(n)}$ lsi A. 设 $C=B^{(n)}$，则$C^2=C\neq 0$，且 C lsi A.这样对任意$x\in A$，有Csi$\langle C,x\rangle$，因而依命题 1，C 是 $\langle C,x\rangle$ 的理想，即有

$$x\cdot C\subseteq C,\quad C\cdot x\subseteq C,\quad \forall x\in A.$$

故 C 是 A 的理想. ∎

命题 4 设 R 是 W-代数 A 的理想，则有

(一) 对任意有限子集 $X\subseteq R$，必有有限子代数 $B\subseteq R$，有$X\subseteq B$ 且 B lsi A，

(二) R 和 A/R 都是 W-代数.

证 (一) 对有限子集 $X\subseteq R$，必有有限子代数 B'，有 $X\subseteq B'$ 且 B'lsi A. 今证 $B'\cap R$ 是 A 的局部次理想. 对任意有限集 $Y\subseteq A$，有B'si $\langle B',Y\rangle$. 另一方面 $B'\cap R$ 是 B' 的理想，当然更有 $(B'\cap R)$ si B'. 这样把两者合在一起就有$(B'\cap R)$ si$\langle B',Y\rangle$.注意到

$$B'\cap R\subseteq\langle B'\cap R,\ Y\rangle\subseteq\langle B',\ Y\rangle,$$

和命题 2 证明一样可得$(B'\cap R)$ si$\langle B'\cap R, Y\rangle$，即$B'\cap R$是$A$的局部次理想. 显然 $X\subseteq B'\cap R$. 这样取 $B=B'\cap R$ 便得(一).

(二) R 是 W-代数这一结论是(一)的推论而 A/R 是 W-代数是显然的. ∎

W-代数有一个重要性质就是：在W-代数中是可以引进迹函数的概念.

任取元素 $a\in A$. 若 $a\in B$ 而 B 是子代数，则记 a 在 B 中所作的右乘为$(R_a)_B$，即

$$x(R_a)_B = xa, \forall x \in B.$$

把$(R_a)_A$简记作R_a。易见若$a\in B\subseteq C$而B,C都是子代数，则有

$$x(R_a)_B = x(R_a)_C,\ \forall x \in B.$$

设A是W-代数，则对任意$a\in A$，必有一有限子代数B，有$a\in B$且B lsi A. 我们定义A的线性变换R_a的迹为有限空间B的线性变换$(R_a)_B$的迹. 即规定

$$\mathrm{Tr}(R_a) = \mathrm{Tr}((R_a)_B). \tag{2}$$

为了说明这个定义是合理的，我们来证明$\mathrm{Tr}(R_a)$的值与局部次理想B的选择无关.

设B'是有限子代数，且有$a\in B'$及B'lsi A. 取$C=\langle B,B'\rangle$. C可看作对B添加有限个元素(例如取有限代数B'的一个基)所生成的子代数. 依定义5.4.2有B si C，因而有次理想链

$$B = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subsetneq B_n = C. \tag{3}$$

预理 1 若K是有限代数H的理想，则$\mathrm{Tr}((R_a)_K) = \mathrm{Tr}((Ra)_H)$，$\forall a\in K$.

证 取H的F-基$b_1,\cdots,b_s,b_{s+1},\cdots,b_t$，使前$s$个元素组成$K$的$F$-基，关于此基$(R_a)_H$所对应的矩阵的形状为

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & 0 \\ M_1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中M_0是$(R_a)_K$关于基$b_1,\cdots,b_s$所对应的矩阵而0为零矩阵. 由于线性变换的迹与基的选择无关，此时显然有

$$\mathrm{Tr}((R_a)_K) = \mathrm{Tr}\, M_0 = \mathrm{Tr}\, M = \mathrm{Tr}((R_a)_H). \ |$$

由此预理，利用(3)便有

$$\mathrm{Tr}((R_a)_B) = \mathrm{Tr}((R_a)_{B_1}) = \cdots = \mathrm{Tr}((R_a)_C).$$

同理，有$\mathrm{Tr}((R_a)_{B'}) = \mathrm{Tr}((R_a)_C)$. 合在一起便得

$$\mathrm{Tr}((R_a)_B) = \mathrm{Tr}((R_a)_{B'}),$$

即定义(2)是合理的.

规定

$$(x,y) = \mathrm{Tr}(R_{xy}),\quad \forall x,y \in A, \tag{4}$$

称之为W-代数A的**迹函数**.

设 B 是代数 A 的有限局部次理想，规定

$$(x,y)_B=\mathrm{Tr}((R_{xy})_B),\ \forall x,y\in B.$$

这里 $(x,y)_B$ 就是有限代数 B 的迹函数.

由(2)知

$$(x,y)=(x,y)_B,\ \forall x,y\in B. \tag{5}$$

这样由有限代数的迹函数的性质可得 A 的迹函数 (x,y) 是对称的、双线性函数且有

$$(xy,z)=(x,yz),\ \forall x,y,z\in A. \tag{6}$$

因而对 W-代数 A 也有

命题 5 设 A 是 W-代数，(x,y) 是它的迹函数. 若 B 是 A 的理想，则

$$C=\{x\in A\,|\,(x,B)=0\}$$

也是 A 的理想. ▎

§ 5 W-代数的结构定理

设 A 是特征为零的域 F 上的 W-代数而 (x, y) 为其迹函数.

定义 5.5.1 说 A 的理想 B 是零迹理想，如果 $(B,B)=0$，也就是 $(x,y)=0$, $\forall x,y\in B$.

预理 1 设 A 是 W-代数，若 A 是 Levitzki 半单代数，则 A 没有非零的零迹理想.

证 设 $B\neq 0$ 是 A 的零迹理想. 依 § 4 命题 4，B 是 W-代数. 因而任取有限子集 $X\subseteq B$，必有有限子代数 C，有 $\langle X\rangle\subseteq C\subseteq B$ 且 C lsi A. 由 § 4(5)及 $(B,B)=0$ 得

$$(C,C)_C=(C,C)=0.$$

依定理 4.1.3，C 是幂零代数，故 $\langle X\rangle$ 是幂零代数. 这样非零理想 B 是局部幂零的，这与 A 的 Levitzki 半单性矛盾，故得预理. ▎

本节的主要定理是(参看刘绍学[5])

定理 5.5.1 设 A 是特征为零的域 F 上的 W-代数，则 A 是

Levitzki 半单代数当且仅当 A 是若干个(有限或无限个)有限单代数的直和。

证　分成一些预理来叙证。

预理 2　A 的任意有限理想 B 必是 A 的直和项。

证　设 $B'=\{x\in A\mid(x,B)=0\}$.由 §4 命题 5,B'是A的理想.依预理 1,A 没有非零的零迹理想,故 $B\cap B'=0$。因而 $B+B'=B\oplus B'$。剩下要证的是 $A=B+B'$。为此任取 $a\in A$。有限代数 B 的迹函数$(x,\ y)_B$ 是非退化的,这是因为$(x,\ y)_B=(x,\ y)$且 $B\cap B'=0$。故依定理 4.2.1,B 有对偶基:$b_1,\cdots,b_t;b'_1,\cdots,b'_t$,即有

$$(b_i,b'_j)_B=\delta_{ij},\quad\forall ij.$$

设

$$b=\sum_i\alpha_ib_i,\ \ \alpha_i=(a,\ b'_i),\forall i,$$

则有

$(a-b,b'_j)=(a,b'_j)-(\sum\alpha_ib_i,b'_j)=\alpha_j-\alpha_j=0,\forall i$,即 $(a-b,B)=0$。故有 $a=b+(a-b)\in B+B'$。|

由预理 2 直接可得

预理 3　A 的有限极小理想是单代数。|

设 $A_\lambda,\lambda\in W$,是 A 的所有有限极小理想,则由上预理知A_λ是单代数.由定理 5.2.5 知$\sum\limits_{\lambda\in W}A_\lambda=\sum\limits_{\lambda\in W}\oplus A_\lambda$。下面预理说明 W 不是空集。

预理 4　若 B 是 A 的非零理想,则 B 中必含有 A 的一个有限非零理想,因而含有有限极小理想。

证　由预理 1,B 不是零迹理想,因而有 $a,b\in B$,有$(a,b)\neq0$.由§4 命题 4,必有 A 的有限局部次理想 C,使 $a,b\in C\subseteq B$。由于$(a,b)=(a,b)_C$,故有限代数 C 的迹函数不恒等于零.依定理4.1.3,C 不是幂零代数。再依 § 4 命题 3 知C含有 A 的非零理想,即 B 含有 A 的有限非零理想。|

由预理 2 知，A_λ，$\lambda\in W$，都是 A 的直和项.设 $A=A_\lambda\oplus A'_\lambda$.

预理 5 若 $a\in A$ 且 $aA_\lambda=A_\lambda a=0$，$\forall\lambda\in W$，则 $a=0$.

证 若 $a\neq 0$，则由 $aA_\lambda=A_\lambda a=0$，$A=A_\lambda\oplus A'_\lambda$ 以及 A_λ 是单代数，必可得 $a\in A'_\lambda$，因而 A 的理想 $B=\bigcap\limits_{\lambda\in W}A'_\lambda\neq 0$。依上预理知 B 必含有 A 的有限极小理想.另一方面，由 B 的定义知，B 不包含任意 A_λ，$\lambda\in W$，而后者穷尽了 A 中一切有限极小理想，故得矛盾. ▎

预理 6 设 B 是 A 的非零有限局部次理想，则 $(B,B)\neq 0$

证 用反证法，设 $(B,B)=0$，则 B 是幂零代数. 设其幂零指数为 $n+1$，则有

$$B\supset B^2\supset\cdots B^n\supset B^{n+1}=0$$

取 $C=B^n\neq 0$，则 $C^2=0$.任取 $0\neq d\in C$，则一维零乘代数 $D=\langle d\rangle$ 是 C 的理想，作为有限局部次理想的理想，依 §4 命题 2，D 是 A 的局部次理想.

现在我们来证明：$dA_\lambda=A_\lambda d=0$，$\forall\lambda\in W$.

为此任取 A_λ，$\lambda\in W$，考察 $H=\langle D,A_\lambda\rangle=\langle d\rangle+A_\lambda$.若 $d\in A_\lambda$，则将有 $H=A_\lambda$。但由 D lsi A，故 D si H 因而 D si A_λ，这将导致 $D=A_\lambda$，而这和 A_λ 的单性是矛盾的. 故知 $d\notin A_\lambda$.

A_λ 是 A 的直和项，当然也是 H 的直和项. 故有

$$H=A_\lambda\oplus\langle e\rangle,$$

$$d=a+e_1, a\in A_\lambda, e_1\in\langle e\rangle.$$

由 $0=d^2=a^2+e_1^2$ 得 $a^2=0$。由 $\langle d\rangle$ si H，易见必有 $\langle a\rangle$ si A_λ. 若 $a\neq 0$，将导致 A_λ 有非零理想，这与 A_λ 的单性矛盾.故 $a=0$ 而 $d=e_1$。这样便有

$$dA_\lambda=A_\lambda d=0,\ \forall\lambda\in W.$$

由预理 5 知必 $d=0$，这和 d 之取法矛盾. 故 $(B,B)\neq 0$. ▎

预理 7 A 的任意有限局部次理想 B 必是某些 A_λ，$\lambda\in W$，的直和.

证 若 $B\neq 0$，则由上预理 $(B,B)\neq 0$，依定理 4.1.3，B 不是幂零代数.依 §4 命题 3，有限子代数 B 含有 A 的非零理想，随之含

有A的一个有限极小理想A_λ. 由预理 2 知必有

$$B=A_\lambda\oplus B_1.$$

作为局部次理想B的理想,B_1本身也是A的有限局部次理想. 对B_1重复上面的讨论,有限次后便得预理. ▎

由于A是W-代数,A中任意元素必在某一有限局部次理想中. 故有

$$A=\sum_{\lambda\in W}\oplus A_\lambda.$$

定理的一个方面证完了.

反过来,若已知$A=\sum_{\lambda\in W}\oplus A_\lambda$,$A_\lambda$是有限单代数,则由定理 5.2.4,注意到$A$的任意理想必是某些$A_\lambda$的直和,因而$A$没有非零的局部幂零理想,这样便得$A$是 Levitzki 半单的.

至此定理全部证完. ▎

下面我们来证明关于W-代数的 Wedderburn 主要定理.

定理 5.5.2 设A为特征零的域F上的W-代数. N是A的局部幂零根,则

(一) 必有子代数P,它本身是 Levitzki 半单代数,使$A=N+P$(半直和),

(二) 若$A=N+P$(半直和)而Q为任意有限子代数且是 Levitzki 半单代数,则必存在A的一个内自同构Φ使$Q\Phi\subseteq P$.

证 (一) 依上面定理,知$A/N=\bar{A}=\sum_{\lambda\in W}\oplus\bar{A}_\lambda$,其中$\bar{A}_\lambda$是有限单代数,$W$是由序数组成的足码集. 将用$\bar{a}$表示$A$的元素$a$所在的剩余类. 为了证明(一),只需对每一$\bar{A}_\lambda$,在$A$中找到一个子代数$P_\lambda$,使$\bar{P}_\lambda=\bar{A}_\lambda$,$P_\lambda\cap N=0$,并且$\sum_{\lambda\in W}P_\lambda$(子空间的和)是一个子代数. 此时当然也就有

$$\sum_{\lambda\in W}P_\lambda=\sum_{\lambda\in W}\oplus P_\lambda.$$

我们用超限归纳法来证明这一点.

先考察$\bar{A}_1$. 令其基为$\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n$. 由于$A$是$W$-代数,必存在

A 的有限局部次理想 B，有 $\{a_1,\cdots,a_n\}\subseteq B$. 由 $\bar{A}_1\subseteq\bar{B}$，故对任意正整数 m，$\bar{A}_1=\bar{A}_1^m\subseteq\bar{B}^m$，因而 B 必不是幂零代数. 因而由§4 命题 1,3 知 $C=B^m$ 是 A 的非零理想且 $C^2=C$. 此时当然有 $\bar{A}_1\subseteq\bar{C}$，$\bar{C}$ 是 $\bar{A}$ 的理想，依定理 5.2.4，知 $\bar{C}$ 是若干个 $\bar{A}_\lambda$ 的直和，即 $\bar{C}$ 是半单的. 这样 $C\cap N$ 将是有限代数 C 的幂零根. 依关于有限代数的 Wedderburn-Мальцев 定理，有子代数 P，使 $C=C\cap N+P$（半直和）. 因而 P 中有子代数 P_1，而 $\bar{P}_1=\bar{A}_1$ 且 $P_1\cap N=P_1\cap C\cap N=0$.

其次，设对所有 $\lambda<\sigma$ 已得 A 的子代数 P_λ，使 $\bar{P}_\lambda=\bar{A}_\lambda$，$P_\lambda\cap N=0$ 而 $H=\sum\limits_{\lambda<\sigma}P_\lambda$（子空间 P_λ 的和）是子代数，因而有 $H=\sum\limits_{\lambda<\sigma}\oplus P_\lambda$. 现在来选择 P_σ.

为此考察 $\bar{A}_\sigma$. 和上面讨论 $\bar{A}_1$ 时完全一样，必有 A 的有限理想 C，$C^2=C$，$\bar{A}_\sigma\subseteq\bar{C}$ 而

$$C=C\cap N+P'\text{（半直和）},P'=P'_\sigma\oplus\cdots\oplus P'_\mu, \qquad (1)$$

其中 $\bar{P}'_\sigma=\bar{A}_\sigma,\cdots,\bar{P}'_\mu=\bar{A}_\mu$，$\mu\in W$.

设

$$K_1=\{x\in H\mid xC=0\},K_2=\{x\in H\mid Cx=0\}.$$

由于 C 是有限理想，H 中的元素 x 对 C 的右乘是有限空间 C 的一个线性变换 R_x. 这样 $\{R_x,\ x\in H\}$ 是一个有限空间. 若 $R_{x_1},\cdots,R_{x_t}$ 是它的一个基，则空间 $H=K_2+V$，其中 V 是 $x_1,\ \cdots,\ x_t$ 生成的子空间. 这就是说，子空间 K_2 在 H 中的补子空间是有限维的. 同理，子空间 K_1 也是这样. 令

$$K=K_1\cap K_2=\{x\in H\mid xC=Cx=0\}, \qquad (2)$$

则 K 在 H 中的补子空间是有限的.

显然 K 是 H 的理想. 但 H 是单代数的直和，故

$$H=K\oplus\sum_{i=1}^{m}\oplus P_{\lambda_i}\text{，其中 } m \text{ 是自然数，}\lambda_i<\sigma,\forall i.$$

重复上面对 $\bar{A}_1$ 的讨论，知必有 A 的有限理想 D，它包含 C，P_{λ_i}，$i=1,\cdots,m$. 对有限代数 D 应用 Wedderburn 定理，有

$$D=D\cap N+S\ (\text{半直和}).$$

再利用 Мальцев 定理，可认定这里的半单子代数 S 是由 D 的半单子代数 P' 扩充而得的，即可认定

$$S=P'_\sigma\oplus\left(\sum_{i=1}^{m}\oplus P'_{\lambda_i}\right)\oplus\cdots\oplus P'_\mu.$$

再用 Мальцев 定理，必有有限代数 D 的一个内自同构 Φ，使

$$P_{\lambda_i}=P'_{\lambda_i}\Phi,\ \ i=1,\cdots,m,$$

故

$$\begin{aligned}S\Phi&=P'_\sigma\Phi\oplus(\sum\oplus P'_{\lambda_i}\Phi)\oplus\cdots\oplus P'_\mu\Phi\\&=P_\sigma\oplus(\sum\oplus P_{\lambda_i})\oplus\cdots\oplus P_\mu,\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $P_\sigma=P'_\sigma\Phi$.

我们说 P_σ 即为所求者。这是因为，$\bar{P}_\sigma=\bar{P}'_\sigma=\bar{A}_\sigma$。作为半单子代数，$P_\sigma\cap N=0$。由(3)知

$$P_\sigma P_{\lambda_i}=P_{\lambda_i}P_\sigma=0,\ \ i=1,\cdots,m.\tag{4}$$

另一方面，由于 Φ 是内自同构，$P_\sigma=P'_\sigma\Phi=dP'_\sigma d^{-1}$，其中 $d=1-n$ 而幂零元 $n\in A$，故 P_σ 必包含在 P'_σ 所在的理想中，故 $P_\sigma\subseteq C$，由(2)知

$$P_\sigma K=KP_\sigma=0.\tag{5}$$

(4)，(5)合在一起就有 $P_\sigma H=HP_\sigma=0$。这样

$$H+P_\sigma=\sum_{\lambda<\sigma}P_\lambda+P_\sigma(\text{子空间和})$$

就是子代数了.

至此完成了超限归纳法的证明. 故得半单子代数 P，有 $A=N+P$。(一)得证.

至于(二)的证明，只需注意到 A 的任意子代数 B 的内自同构 Φ，都具有形式

$$b\Phi=dbd^{-1},\ \forall b\in B,\ d=1-n\ \text{而幂零元}\ n\in B.$$

因而可扩充为 A 的内自同构：

$$a\mapsto dad^{-1},\ \forall a\in A.$$

重复证明(一)时的讨论即得. 留给读者去作.

我们知道关于有限维 Lie 代数（以及有限 Jordan 代数、有限交错代数等）也有与有限结合代数的 Wedderburn 结构理论完全平行的一整套理论. 相应地关于 $\mathscr{W}$-Lie 代数的讨论可参看 Amayo 和 Stewart(1)，关于 $\mathscr{W}$-Jordan 代数等的讨论可参看刘绍学[5]。

习 题

1．证明域 F 上交换的代数的代数是局部有限的。

2．设 Φ 是交换主理想环，A 是 Φ 上的代数(即 A 是环又是 Φ-模，且有 $1a=a$, $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$, $\forall a, b\in A$, $\alpha\in\Phi$)，称 A 是有限 Φ-代数，如果 Φ-模 A 是有限生成的，类似地可以定义局部有限 Φ-代数. 证明：局部有限 Φ-代数借助于局部有限 Φ-代数的扩张也是局部有限 Φ-代数。

3．若有单位元的环 R 是其理想的和，则这个和是有限和。

4．证明 R-模 M 是其子模 $\{M_\alpha, \alpha\in A\}$ 的直和，当且仅当 (1) $\sum\limits_{\alpha\in A} M_\alpha=M$，(2) 对每个 α, $M_\alpha\cap\sum\limits_{\beta\neq\alpha}M_\beta=0$.

5．一个环 R 叫作亚直可约环，如果 R 可表为环 S_i 的亚直和，且 R 对每个 S_i 的投影都不是同构，否则就称 R 为亚直既约环。 证明：一个环 R 是亚直既约环 $\Longleftrightarrow$ R 的所有非零理想之交不为零。

6．每一个环都同构于一些亚直既约环的亚直和。

7．设 R 是有单位元的环，试刻划具有下面性质的最小理想 I：R/I 是单环的亚直和。

8．设 P 是一个性质，试刻划（如果存在）具有下面性质的最小理想 I：R/I 是 P-环的亚直和。

9．设 R 是交换环，则下列条件等价：

(1) R 可表示成整域的亚直和。

(2) R 同构于域的亚直和的子环。

(3) R 里没有非零幂零元。

10．R 是结合环，证明：B 是 R 的次理想 $\Longleftrightarrow$ 存在 R 的理想 I 及正整数 n，使 $I^n\subseteq B\subseteq I$。

11．证明：若 A, B 是环 R 的次理想，则 $\langle A, B\rangle$ 也是 R 的次理想。

12．设 $I_\alpha(\alpha\in\Omega)$ 是环 R 的理想，证明：$R/\bigcap\limits_{\alpha\in\Omega}I_\alpha$ 同构于 R/I_α $(\alpha\in\Omega)$ 的亚直和。

第六章　Artin 环

把有限结合代数的 Wedderburn 理论推广到环上去的第一个重要步骤是 E. Artin 关于极小条件环的理论. 下一个重要步骤是关于一般环的 Jacobson 理论,它把极小条件环的主要结果作为特殊情况而包括进去了. 然而我们在这里仍先介绍 Artin 的环理论. 这是为了使读者看到发展的过程, 也由于 Artin 的环理论的重要性.

§1　极小条件与极大条件, Artin 环与 Noether 环

在第五章§1中我们谈过关于代数的一类有限条件. 这里介绍关于代数或环的另一类有限条件.

定义 6.1.1　设 R 是环而 Ω 是环的某些选定的子环组成的非空集. 属于 Ω 的子环记作 Ω-子环. 说环 R 对 Ω-子环满足极小条件,如果对于 Ω 的任意一个非空子集 Φ,Φ 内必有极小者,即必存在一个 Ω-子环 $S\in\Phi$, 有

$$S\not\supset X,\ \forall X\in\Phi.$$

说环 R 对 Ω-子环满足极大条件,如果,对于 Ω 的任意一个非空子集 Φ,Φ 内必有极大者,即必存在一个 Ω-子环 $T\in\Phi$,有

$$T\not\subset X,\ \forall X\in\Phi.$$

命题 1　环 R 对 Ω-子环有极小条件当且仅当对 Ω 中任意一个降链(即由 Ω-子环组成的降链)

$$S_1\supseteq S_2\supseteq\cdots\supseteq S_n\supseteq\cdots,n\text{ 是自然数},\tag{1}$$

必在有限步后停下来,即存在一自然数 N,有

$$S_N=S_{N+1}=\cdots=S_{N+p}=\cdots,\forall\text{ 自然数 }p.\tag{2}$$

证 若R有极小条件，而(1)是任意给定的一个Ω-子环降链．取$\Phi=\{S_n, n=1,2,\cdots\}$，则依定义6.1.1，$\Phi$该有极小者，说是$S_N$，由之即得(2)．故得$\Omega$-子环降链必在有限步后停下来．

反之，若对任意Ω-子环降链(1)都有(2)，而Φ是Ω的任意给定的非空子集．假设Φ中无极小者．此时任取$S_1\in\Phi$，将有$S_2\in\Phi$，使$S_1\supset S_2$．这样继续下去，将得由Ω-子环组成的无限真降链：

$$S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_n\supset\cdots.$$

这与有(1)必有(2)是矛盾的．故Φ必有极小者．|

类似地可证明

命题 2 环R对Ω-子环有极大条件当且仅当对Ω中任意一个升链

$$S_1\subseteq S_2\subseteq\cdots\subseteq S_n\subseteq\cdots, n\text{是自然数}, \tag{3}$$

必在有限步后停下来，即存在一自然数N，有(2)．|

由于命题1,2，常统称极小条件和极大条件为**链条件**．当然对其他代数系统，如代数，群，模等也可以相应的定义链条件．

若当Ω取作R的所有子环(所有理想、所有右理想、所有左理想、所有主理想)集，而R对Ω-子环有极小(大)条件，此时常简称为R对子环(理想、右理想、左理想、主理想)有极小(大)条件．

定义 6.1.2 对右(左)理想有极小条件的环，特称之为右(左)Artin环．并简称右Artin环为Artin环．

对右(左)理想有极大条件的环，特称之为右(左)Noether环，并简称右Noether环为Noether环．

显然，Artin环(Noether环)的同态像仍为Artin环(Noether环)．

下面看几个例子：

例 1 有限环对子环有极小(大)条件，因而有限环是Artin环，也是Noether环．反过来，可以证明，一个对子环同时有极小条件和极大条件的结合环必是有限环．(参看 Шнейдмюллер[1])

例 2 除环是Artin环，也是Noether环．因为除环只有两

个右理想：它本身和零.

例 3　除环D上的矩阵环D_n是Artin 环. 这是因为D_n可以看作是除环D上的右向量空间,其维数$(D_n:D)=n^2$,因而对其子空间是有极小条件的. D_n的每一右理想都是右向量空间D_n的子空间,故对右理想也有极小条件,即D_n是 Artin 环. 同样可知D_n是左 Artin 环,左(右)Noether 环.

例 4　整数环是 Noether 环,这可由整数环是主理想环以及下面的命题 3 得出. 但易见整数环不是 Artin 环.

例 5　考虑一切 2×2 上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & r \end{pmatrix},$$

其中a,b为任意实数而r为任意有理数, 作成的环R. 不难证明,R是左 Artin 环(也是左 Noether 环)但不是右 Artin 环(也不是右 Noether 环). 证明留给读者. 由此可见,Artin 环(Noether 环)对左、右理想不对称.

设S是环R的一个非空子集. S在R中生成的左理想(即R中含S的一切左理想之交)将记作$(S\rangle$, 而S称为左理想$(S\rangle$的一个**生成元组**. 说R的左理想A是**有限生成的**, 如果$A=(S\rangle$而S是有限集. 类似地, 将S在R中生成的右理想记作$\langle S)$.

命题 3　环R是左 Noether 环$\Longleftrightarrow R$的每一左理想都是有限生成的.

证　"$\Rightarrow$". 设A是R的一个非零左理想. 任取$a_1\in A$. 设对任意正整数n,已取定a_i, $i<n$. 若$(a_1,\cdots,a_{n-1}\rangle\subsetneqq A$, 则取$a_n\in A\backslash(a_1,\cdots,a_{n-1}\rangle$. 此时显然有$(a_1,\cdots,a_{n-1}\rangle\subsetneqq(a_1,\cdots a_n\rangle$. 但$R$是左 Noether 环,故必得一正整数$m$,有$(a_1,\cdots,a_m\rangle=A$.

"$\Leftarrow$." 任取R的一左理想升链

$$A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots.$$

取$A=\bigcup_{i=1}A_i$,则A是R的左理想. 依假设$A=(a_1,\cdots,a_n\rangle$. 但A为A_i之并集,故必有正整数m,使$a_i\in A_m$, $i=1\cdots,n$,即有$A_m=$

$A_{m+1}=\cdots$. ∎

命题 4 设A为环R的理想，若知R/A及A都是Artin环(Noether环)，则R也是Artin环(Noether环)。

证 任取环R的一个右理想降链：

$$I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots\supseteq I_n\supseteq\cdots.$$

由于R/A是Artin环，故必有自然数m，使

$$I_m+A=I_{m+i}+A,\ i=1,2,\cdots.$$

又因为A是Artin环而$I_p\cap A$是A的右理想，故必有一自然数$n\geqslant m$，使

$$I_n\cap A=I_{n+i}\cap A,\ i=1,2,\cdots.$$

我们利用下面这个易证的等式：当$I_n\supseteq I_{n+i}$时，有$I_n\cap(I_{n+i}+A)=I_{n+i}+I_n\cap A$，便得

$$\begin{aligned}I_n&=I_n\cap(I_n+A)=I_n\cap(I_{n+i}+A)\\&=I_{n+i}+I_n\cap A=I_{n+i}+(I_{n+i}\cap A)=I_{n+i},\ \forall i.\end{aligned}$$

即证得R是Artin环。

完全类似地可以证明命题中关于Noether环的结论。∎

Artin环和Noether环之间有什么联系呢？在后面§4中，我们将证明：带有单位元的Artin环必是Noether环。

我们知道有限维幂零元素代数是幂零的。由此自然提出问题：在什么较弱的条件下，幂零元素环是幂零的？借用定理2.1.1的证明不难得到

定理 6.1.1 若结合环R对幂零子环有极大条件，则R的任意幂零元子环必是幂零的。

下面我们将证明这方面最重要的两个推广，先作一些准备。

预理 1 若L是R的幂零元左理想，则aR,$a\in L$，是幂零元右理想。

证 任取$y\in aR$，则$y=ax$。但$xa\in L$，故有n，使$(xa)^n=0$。由之有

$$y^{n+1}=a(xa)^nx=0.\ ∎$$

预理 2 环R中两个(因而有限个)幂零左(右)理想的和仍为

幂零左(右)理想.

证 设 A_1, A_2 是 R 的两个幂零左理想,则有 m, $A_1^m=A_2^m=0$. 此时

$$(A_1+A_2)^{2m}=\sum L_1L_2\cdots L_{2m}, \qquad (4)$$

其中 L_i 或是 A_1 或是 A_2. 由于其总数是 $2m$ 个,故在每一乘积中或是 A_1 出现次数大于 m,或是 A_2 出现的次数大于 m. 注意到 A_i 是左理想且其幂零指数 $\leqslant m$,即得(4)中右侧中每一乘积都是零,故 $(A_1+A_2)^{2m}=0$. ∎

预理 3 环 R 中若有非零的幂零单侧理想必有非零的幂零理想.

此预理的证明和第二章§2 预理 4 的证明相同.

定理 6.1.2 (Hopkins) 设 R 是 Artin 环,则任意幂零元单侧理想必是幂零的.

证 先讨论幂零元素右理想 I. 由

$$I\supseteq I^2\supseteq\cdots\supseteq I^n\supseteq\cdots,$$

以及关于右理想有极小条件,知有 n,使 $B=I^n=I^{n+1}=\cdots$. 故 $B^2=B$. 若 $B\neq 0$,则由 $B^2=B\neq 0$ 知,必有 $b\in B$,使 $bB\neq 0$. 设 $W=\{bB\mid bB\neq 0,\ b\in B\}$,则 W 是非零右理想的非空集. 因而依假设,W 有极小者,设为 $b_0B\neq 0$, $b_0\in B$. 由 $0\neq b_0B=b_0B^2$,故有 $c\in B$ 使 $b_0cB\neq 0$. 但显然有 $b_0cB\subseteq b_0B$,由 b_0B 的极小性,得 $b_0cB=b_0B$,即有 $x\in B$ 使 $b_0c=b_0cx$. 然而 B 是幂零元素的,故 $x^n=0$,由之便有

$$0\neq b_0c=b_0cx=b_0cx^2=\cdots=b_0cx^n=0,$$

此矛盾说明 $B=\{0\}$,即 I 是幂零的.

其次讨论幂零元素左理想 A. 由预理1, aR, $a\in A$, 是幂零元素右理想. 由上证,知 aR 是幂零右理想. 这样 $AR=\sum\limits_{a\in A}aR$,依预理 2,是幂零元素(右)理想. 再据上证,知 AR 是幂零的. 由 $(AR)^n=0$ 得 $A^{2n}=(AA)^n\subseteq(AR)^n=\{0\}$. ∎

定理 6.1.3 (Levitzki) 设 R 是 Noether 环. A 是幂零元单

侧理想，则 A 是幂零的.

证 取 R 的所有幂零理想组成的集 W. 由于零理想是幂零理想，故 W 非空. 这样，依假设，W 中有极大者，记作 N. 由预理 2 知两个幂零理想之和仍为幂零理想，故 N 其实是最大的幂零理想，即它含有 R 的一切幂零理想. 我们的目的是要证明 $A\subseteq N$. 用反证法，设 $A\nsubseteq N$. 考虑 $\bar{R}=R/N$，则 $\bar{R}$ 是 Noether 环，没有非零的幂零理想且含有幂零元素单侧理想 $\bar{A}\neq\bar{0}$. 不妨仍记 $\bar{R}$ 为 R，$\bar{A}$ 为 A. 这样便存在有一个 Noether 环 R，它没有非零的幂零理想但却含有幂零元素单侧理想 $A\neq 0$. 下面来证明这是不可能的.

由于 A 不是幂零的，故必有 $0\neq a\in A$ 使 $U=Ra\neq 0$. 由于 A 是幂零元素的以及预理 1，可知 U 是幂零元素左理想. 任取 $0\neq u\in U$. 令

$$r(u)=\{x\in R \mid ux=0\},$$

则注意到 u 是幂零元素，知 $r(u)$ 是 R 的非零右理想.

考虑一切 $r(u)$，$0\neq u\in U$，组成的右理想集 Ω. 由于 R 是 Noether 环，故必有 $0\neq u_0\in U$ 而 $r(u_0)$ 是 Ω 中的一个极大者. 对任意 $x\in R$，显然有 $r(xu_0)\supseteq r(u_0)$. 因此若 $xu_0\neq 0$，则由 $xu_0\in U$ 因而 $r(xu_0)\in\Omega$ 以及 $r(u_0)$ 之极大性得 $r(u_0)=r(xu_0)$.

今证 $u_0Ru_0=0$. 任取 $y\in R$. 若 $yu_0\neq 0$，则必有正整数 k，使 $(yu_0)^{k+1}=0$ 而 $(yu_0)^k\neq 0$. 由于 $(yu_0)^k$ 具有形状 xu_0，依上讨论有 $r((yu_0)^k)=r(u_0)$. 但 $yu_0\in r((yu_0)^k)$，故也有 $yu_0\in r(u_0)$，而这就是 $u_0yu_0=0$，故得 $u_0Ru_0=0$.

由之得 u_0R 是幂零右理想. 但 R 没有非零幂零理想，由预理 3，也没有非零幂零单侧理想，故 $u_0R=0$. 设 $B=\{x\in R \mid xR=0\}$，则 B 是幂零右理想且含有 $u_0\neq 0$，而这是和 R 没有非零幂零理想相矛盾的. 此矛盾使定理得证. ❙

有许多文章讨论所谓 nil-nilpotence 问题：满足一些什么条件的幂零元素子环(或单侧理想或理想)本身是幂零环. 在第八章 §3，§4 中还将讨论这个问题. 这里我们指出下列几篇供有兴趣

者去参考：谢邦杰[1]，Schok[1]，Herstein，Small[1]，Fisher[1]．

§ 2 Artin 环的 Wedderburn 理论

定理 6.2.1 R 为 Artin 环，则 R 中有唯一最大幂零理想 N，它包含 R 的一切幂零单侧理想且商环 R/N 没有非零的幂零理想．

证 设 N 为 R 中一切幂零理想之和，则由§1 的预理 2，N 是一个幂零元素理想(参看第二章§2 预理 3)．由定理 6.1.2，知 N 是幂零理想，因而它是最大的幂零理想，由§1 预理 3 还知它包含一切幂零单侧理想．由于幂零环借助幂零环所得到的扩张是幂零的(参看第二章§2 预理 2)，故 R/N 没有非零的幂零理想．|

定义 6.2.1 R 为 Artin 环．称 R 的唯一最大幂零理想为 R 的幂零根．若其幂零根为零，则称 R 为半单 Artin 环或简称半单环．

这样上面定理可改述为

定理 6.2.1 若 R 为 Artin 环，R 的幂零根 N 是存在的而 R/N 是半单环．

这是因为 R/N，作为 Artin 环的商环，也是 Artin 环．

下面我们来讨论半单环的结构．

环的一个元素 e 叫作幂等元，如果 $e\neq 0$ 且 $e^2=e$．与有限代数情况一样，我们仍然通过幂等元来研究半单环的结构．

预理 1 设环 R 的一个元素 a 有性质：a^2-a 是幂零的，则或者 a 是幂零元或者存在一整系数多项式 $f(x)$，使 $e=af(a)$ 是幂等元．

证 依假设，有自然数 k 使 $(a^2-a)^k=0$．展开之得 $a^k=a^{k+1}p(a)$，其中 $p(x)$ 是整系数多项式．因而有

$$a^k=a^kap(a)=a^{k+1}p(a)ap(a)=a^{k+2}p(a)^2.$$

继续这样作下去便得 $a^k=a^{2k}p(a)^k$．若 $a^k\neq 0$，则

$$e=a^kp(a)^k\neq 0,$$

且 $$e^2=a^{2k}p(a)^{2k}=a^kp(a)^k=e.\ \blacksquare$$

预理 2 设 I 是环 R 的一个极小单侧理想，则或者 $I^2=0$ 或者 I 有幂等生成元 e.

证 设 I 是极小右理想. 若 $I^2\neq0$，则有 $a\in I$，使 $aI\neq0$.因而 $aI=I$,随之有 $e\in I$ 使 $ae=a$. 故 $ae=ae^2$ 而有 $a(e-e^2)=0$. 设 $B=\{x\in I\,|\,ax=0\}$,则 B 是 R 的右理想且 $B\subseteq I$ 而 $B\neq I$.依右理想 I 的极小性知 $B=0$. 但 $e-e^2\in B$,故 $e=e^2$. 由于 $a\neq0$,故 $e\neq0$,即 e 是幂等元. 另一方面,易见 eR 是含于 I 中的非零右理想,再依 I 的极小性,有 $I=eR$. $\blacksquare$

定理 6.2.2 若 R 是 Artin 环，I 是 R 的非幂零右理想,则 I 含有幂等元.

证 依假设及定理6.2.1知 I 不在 R 的幂零根 N 中,考虑半单环 $\bar{R}=R/N$. 由上知 $\bar{I}\neq\bar{O}$. 依 $\bar{R}$ 中的极小条件，知 $\bar{I}$ 含有一个极小右理想 $\bar{I}_0$,它当然不能是幂零的,故依预理 2，$\bar{I}_0$ 含有幂等元 $\bar{a}$, $a\in I$. 由 $\bar{a}^2=\bar{a}\neq\bar{0}$, 故 $a^2-a\in N$ 是幂零元而 a 不能是幂零的. 依预理 1, $e=af(a)\in I$ 是幂等元. $\blacksquare$

对于半单环，我们有下面更进一步的结果.

定理 6.2.3 若 R 是半单环，则 R 的任意非零右理想 I 都有幂等生成元 e,即 $I=eR$.

证 作为半单环的非零右理想，I 不是幂零的，因而依上定理,I 有幂等元. 设 e 是 I 的一个幂等元. 令 $A(e)=\{x\in I\,|\,ex=0\}$. 假若 I 有幂等生成元 e,则易见 e 必是 I 的左单位元，因而该有 $A(e)=0$. 这样该考虑 e,使 $A(e)$ 尽可能小. 选取非空右理想集 $\{A(e)\,|\,e$ 是 I 中的幂等元$\}$的一个极小者 $A(e_0)$.

若 $A(e_0)=0$.则由 $e_0(x-e_0x)=0,\forall x\in I$,得 $x-e_0x\in A(e_0)=0$, 即 $x=e_0x$. 这样 $I=e_0I\subseteq e_0R\subseteq I$, 即得 $I=e_0R$.

若 $A(e_0)\neq0$,今证这是不可能的. 因为此时依上面定理,半单环 R 的非零右理想 $A(e_0)$ 将含有幂等元 e_1. 由 $A(e_0)$ 的定义知 $e_1\in I$, $e_0e_1=0$. 考虑 $e'=e_0+e_1-e_1e_0$. 由于

$$e'e_1=(e_0+e_1-e_1e_0)e_1=e_1\neq0,$$

$$e_0e'=e_0(e_0+e_1-e_1e_0)=e_0\neq 0,\tag{1}$$

故 $e'\neq 0$. 直接计算知 $e'^2=e'$,故 e'是 I 的一个幂等元. 由(1)还知 $A(e')\subseteq A(e_0)$且 $e_1\notin A(e')$, 但这和 $A(e_0)$ 的极小性是矛盾的. 故 $A(e_0)\neq 0$ 是不可能的. 定理得证. ▎

这个定理有下面的重要推论. 先给一个

定义 6.2.2 R 是环,令 $C=\{a\in R\,|\,ax=xa,\ \forall x\in R\}$ 易见 C 是 R 的一个子环，称之为环 R 的中心.

定理 6.2.4 设 R 是半单环，则对 R 的任一非零理想 A 都有 $A=Re=eR$,其中 e 是属于 R 的中心的幂等元.

证 把理想 A 看成 R 的右理想,则依上定理,必有幂等元 $e\in A$ 使 $A=eR$. 欲证 $A=Re$,来考虑 $B=\{x\,|\,x=a-ae,\ a\in A\}\subseteq A$. 易见 $BA=B(eR)=(Be)R=0$. 故 $B^2\subseteq BA=0$. 这样 B 是 R 的幂零左理想. 由 R 的半单性知 $B=0$,即 $a=ae$, $\forall a\in A$. 由之得 $A=Re$.

剩下来要证 e 在 R 的中心内. 注意到理想 $A=Re=eR$,故 e 是 A 的单位元. 对任意 $y\in R$ 有

$$ye=e(ye)=(ey)e=ey,$$

即 e 在 R 的中心内. ▎

定理 6.2.5 半单环 R 有单位元. ▎

有了这些结果便容易得到下面的主要结构定理. 先引入

定义 6.2.3 称 R 为单 Artin 环,如果 R 是 Artin 环,没有真理想且 $R^2\neq 0$.

定理 6.2.6 （半单 Artin 环的结构定理） R 是半单环$\Longleftrightarrow$ R 是有限个单 Artin 环的直和.

证 “$\Leftarrow$”. 设 $R=A_1\oplus\cdots\oplus A_n$, 每一 A_i 都是单 Artin环. 此时易证(参看第一章 §4 例 3) R 的每一理想 A 必是某些 A_i 的直和,因而 $A^2=A$,故 R 没有非零的幂零理想. 利用 §1 命题 2 即得 $A_1\oplus A_2$ 是 Artin 环. 再用一下归纳法便得 R 是 Artin 环. 总起来便得 R 是半单环.

“$\Rightarrow$”. 设 R 是半单环. 首先证明 R 的每一个理想 A 都是 R 的

直和项．依上面定理，R 有单位元 1 且 $A=eR=Re$ 而 e 是 A 的单位元并在 R 的中心内．利用环 R 关于幂等元 e 的 Peirce 分解（参看定理 2.4.3 的证明）即可知 A 是直和项．或者如下来讨论．设 $e'=1-e$，e' 在 R 的中心内．因而 $A'=e'R=Re'$ 是 R 的理想，直接验证得 $R=A\oplus A'$．

其次，R 的每一理想 A 都是半单环．这是因为 A 必是 R 的直和项，因而环 A 的右理想 I 必也是环 R 的右理想，由之即得 A 是半单环．

最后，任取 R 的一个极小理想 A_1（在 Artin 条件下，R 必有极小理想），则由上知 $R=A_1\oplus A_1'$．A_1' 为半单环，若 $A_1'\neq 0$，则取 A_1' 的一个极小理想 A_2，得 $A_1'=A_2\oplus A_2'$，即有

$$R=A_1\oplus A_2\oplus A_2'.$$

这里 A_2 当然也是 R 的极小理想，A_2' 又是半单环．这样继续下去便得理想降链：

$$R\supset A_1'\supset A_2'\supset\cdots.$$

但 R 有极小条件，此链在有限步后必达到零理想．因而有 $R=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n$，其中每一 A_i，作为半单环 R 的极小理想和直和项，它本身是单 Artin 环．❙

定理 6.2.7（半单 Artin 环的唯一性定理）R 是半单环，若 $R=A_1\oplus\cdots\oplus A_n=B_1\oplus\cdots\oplus B_m$，其中 A_i，B_j 都是单 Artin 环，则必 $n=m$ 且 $A_i=B_{\pi(i)}$，$\forall i$，其中 π 是 $1,\cdots,n$ 的一个置换．❙

上面这两个定理是有限 N-半单代数的结构定理的一个非常完满的推广．

§ 3　完全可约模

有限单代数的结构定理是利用幂等元及 Peirce 分解来证明的．对于单 Artin 环的讨论我们宁愿采取另外一种方式——即运用环的表示论的方法．这不但能使我们从另一个角度加深理解有

限单代数的结构定理，并且也为以后讨论一般环的 Jacobson 理论作一些准备。

我们知道交换加群M的所有自同态对应集End(M)对下面规定的运算作成一个结合环：

$$\begin{aligned} &x(\alpha\beta)=(x\alpha)\beta, \\ &x(\alpha+\beta)=x\alpha+x\beta, \end{aligned}\quad \forall x\in M, \alpha,\beta\in \mathrm{End}(M).$$

这个环 End(M)在环的表示论中的位置相当于在有限代数的表示论中的矩阵代数(或线性变换代数)。

定义 6.3.1 环R到交换群M的自同态环 End(M) 内的一个同态对应叫作环R的一个表示。

与代数的表示可归结为代数模的情况完全一样，环R的表示可归结为对环上模的讨论。

定义 6.3.2 非零交换加群M称作环R上的右模，简记为R-右模，如果还有一个满足下列条件的模运算：$M\times R\to M$，

$$\begin{aligned} &(1)\ (x+y)a=xa+ya, \\ &(2)\ x(a+b)=xa+xb, \\ &(3)\ x(ab)=(xa)b, \end{aligned}\quad \forall x,y\in M,\ a,b\in R.$$

若环R有一个表示φ：$R\to$End(M)，则规定 $xa=x(a\varphi)$，$x\in M, a\in R$，这里 $x(a\varphi)$是 x 在自同态 $a\varphi$ 下的像，M便成为R-右模。反之，若已知 M 是 R-右模，规定

$$\begin{aligned} \varphi_a:\ &M\to M \\ &x\mapsto xa, \end{aligned}$$

则易见 $\varphi_a\in$ End(M)而 φ：$a\to\varphi_a$，$a\in R$，是环R到 End(M) 内的一个同态对应，即 φ 是环R的一个表示。

这样讨论R的表示与讨论R-右模就是一回事了。下面主要讨论R-右模，并再简记之为R-模。

R-子模，R-商模，R-模的同态，R-模的直和以及R-模的生成元组等都可相应的去定义。下面将直接引用。

与代数情形一样，R本身可看作R-模。此时常把它记作 R_R。易见 R_R 的 R-子模就是环R的右理想。

定义 6.3.3 M是R-模,说M是R-既约模或R-单模,如果

(1) $MR=\{\sum x_i a_i \mid x_i\in M, a_i\in R\}\neq 0$,

(2) M没有真R-子模.

与R-既约模相应的表示叫作R的既约表示.

定义 6.3.4 没有真R-子模的R-模叫作R-弱单模.

这样R-弱单模M或者是R-既约模或者是$MR=0$,这时M是元数为素数的循环群.

容易证明下面的

命题 1 M是R-既约模,当且仅当对任意$0\neq x\in M$有$M=xR$. ❙

定义 6.3.5 说R-模M是完全可约模,如果M的每一R-子模都是M的直和项.

以前我们曾多次谈到每一理想都是直和项的代数或环.它们之间有平行的结构定理,其证明也是彼此类似的.

预理 1 完全可约模M的子模N也是完全可约模.

证 任取N的一个子模P.由于P也是M的子模,依假设有$M=P\oplus P'$.这样$N=P\oplus P'\cap N$,即N的任一子模都是N的直和项. ❙

定理 6.3.1 R-模M是完全可约模$\Longleftrightarrow M$是R-弱单模的直和.

证 "$\Leftarrow$".设M是R-弱单模M_α, $\alpha\in W$,的直和,而N是M的一个子模.显然

$$M=N+\sum_{\alpha\in W}M_\alpha. \tag{1}$$

将集W良序之.若对$\beta<\mu$, $\mu\in W$,所有M_β之取舍已经确定而用V表示保留下来的M_β的足码集,今确定M_μ之取舍.若

$$(N+\sum_{\beta\in V}M_\beta)\cap M_\mu=0,$$

则保留M_μ,否则由于M_μ之弱单性必有

$$(N+\sum_{\beta\in V}M_\beta)\cap M_\mu=M_\mu,$$

此时把 M_μ 舍去．这样依超限归纳法，每一 M_α 之取舍完全确定．设保留下来的 M_α 的足码集为U，则易证

$$M=N\oplus\sum_{\alpha\in U}\oplus M_\alpha.$$

即 N 是 M 的直和项，因而 M 是完全可约模．

"⇒"．设 M 是完全可约模．设 $M_\alpha,\alpha\in W$，是 M 的所有极小子模的全体，令$M'=\sum_{\alpha\in W}M_\alpha$，如果 M 中没有极小子模，则令 $M'=0$，易见 M' 是 M 的子模，因而依假设

$$M=M'\oplus M''.$$

此时 M''必不含极小子模．设 $M''\neq 0$ 而a是它的一个非零元素．a 生成的子模 $N\subseteq M''$．N当然也不含极小子模，因而对N的任意子模 $P\subset N$，必有子模 P' 使$P\subset P'\subset N$，否则 $N=P\oplus P''$而 P'' 将是极小子模．故存在无限链

$$N_1\subset N_2\subset\cdots\subset N_m\subset\cdots\subset N.$$

依预理 1，N_i 及 $P=\bigcup_{i=1}^{\infty}N_i$ 都是完全可约模．故有非零子模 P_{i+1}，$i=1,2,\cdots$，以及 P' 使

$$N_{i+1}=P_{i+1}\oplus N_i,\ \forall i$$

$$N=P\oplus P'.$$

令 $P_1=N_1$ 易见

$$N=\sum_{i=1}^{\infty}\oplus P_i\oplus P'. \tag{2}$$

另一方面 $a\in N$，故

$$a=b_1+\cdots+b_m+b,\ b_i\in P_i,\ i=1,\cdots,m,\ b\in P',$$

而 N 是由元素a 生成的，所以有

$$N\subseteq P_1+\cdots+P_m+P'. \tag{3}$$

(3)与(2)是矛盾的. 故$M''=0$. 即$M=M'=\sum_{\alpha\in W}M_\alpha$. 和前面证明一样,舍去若干个 M_α,便得

$$M=\sum_{\alpha\in U}\oplus M_\alpha, \tag{4}$$

其中 U 是 W 的一个子集.由(4) 还知极小子模 M_α 都是弱单模. 这样,定理证完. ▎

定理 6.3.2 (唯一性定理) 若 R-模 $M=\sum_{\alpha\in W}\oplus M_\alpha=\sum_{\beta\in U}\oplus N_\beta$,其中 M_α, N_β 为 R-弱单模, 则存在 W 到 U 上的一个一一对应 φ,使 $M_\alpha\cong N_{\alpha\varphi}$, $\forall\alpha\in W$.

我们把这个定理的证明留给读者(参看刘绍学[6]).

作为定理 6.3.1 的一个推论,我们写出下面

定理 6.3.3 R-模 M 是完全可约模且对任意 $0\neq x\in M$ 有 $xR\neq 0$ 当且仅当 M 是 R-既约模的直和. ▎

定理 6.3.4 R-模 M 是完全可约模当且仅当 M 是 R-弱单模的和.

我们知道域和除环上的模都有线性无关的生成元组,即有基,因而是完全可约的,而且是彼此同构的既约模的直和. 这样,完全可约模可以看作是向量空间的一个自然推广.

§ 4 半单环与完全可约模

当环R有单位元 1 时,如无特别声明, 永远假定 1 是 R-模 M 的恒等自同构,即 $x\cdot 1=x$, $\forall x\in M$.

预理 1 当环R有单位元时, R-弱单模必是 R-既约模. ▎

定理 6.4.1 设R有单位元 1 ,则R是半单环$\Longleftrightarrow R_R$是完全可约模.

证 "$\Rightarrow$". 设R是半单环. 由于 R_R 的子模 N是环R的右理想,故由定理 6.2.3 得知,$N=eR$,其中 $e\in N$ 且 $e^2=e$. 考虑子模 $N'=(1-e)R$. 易见 $R_R=N\oplus N'$. 即 R_R 的每一子模都是直和

项,即 R_R 是完全可约模.

"$\Leftarrow$". 设 R_R 是完全可约模. 依定理 6.3.1 并注意到预理 1,知 R_R 是 R-既约模的直和. 但 R_R 以单位元 1 为模生成元,故 R_R 只能是有限个 R-既约模的直和. 此时显然 R_R 有组成列,因而 R_R 对子模(也就是 R 的右理想)有极小条件即 R 是 Artin 环. 为了证明 R 是半单的,设 N 是 Artin 环 R 的幂零根. N 是 R_R 的一个子模,故有

$$R_R = N \oplus N',$$

此时

$$1 = x + x',\ x \in N,\ x' \in N'.$$

由之得 $x - x^2 = x'x \in N \cap N' = 0$. 但 $x \in N$ 是幂零元素. 故有

$$x = x^2 = x^3 = \cdots = x^n = 0.$$

这样 $1 = x' \in N'$,即 $N' = R$. 故 $N = 0$,即 R 是半单环. ∎

作为这个定理的一个推论,我们有

定理 6.4.2 半单环 R 是它的有限个极小右理想的(在加群意义下)直和. ∎

定理 6.4.3 设 R 有单位元 1,则 R 是半单环 $\Longleftrightarrow$ 任意 R-模 M 都是完全可约模.

证 "$\Leftarrow$". R_R 是 R-模,依假设它是完全可约的,依定理 6.4.1,R 是半单环.

"$\Rightarrow$". 设 M 是任意 R-模. 由上定理,

$$R = \sum_{i=1}^{n} \oplus I_i,$$

I_i 是 R 的极小右理想,此时可将 M 写成

$$M = MR = \sum_{m \in M} \sum_{i=1}^{n} mI_i.$$

今证每个子模 mI_i 或为零或为 R-既约模. 考虑对应:

$$\varphi:\ I_i \to mI_i$$
$$x \mapsto mx.$$

φ 显然是 R-模 I_i 到 R-模 mI_i 上的同态对应. 但 I_i 是极小右理

想，因而是 R-既约模，故 φ 或为同构对应或为零同态对应，亦即或 mI_i 是 R-既约模或 $mI_i=0$. 这样 M 是一些既约子模之和. 仿定理 6.3.1 的证明，舍去其中一些既约子模后，便得 M 是既约模的直和，因而依定理 6.3.1，M 是完全可约模. ▎

这样，每一 R-模的完全可约性便把半单环从有单位元的环类中分划出来了. 上面已提到域或除环上的模都是完全可约的. 半单环是保证其上的模是完全可约的最广泛的环类.

在上定理的证明中包含了下面定理的证明：

定理 6.4.4 设 R 是半单环，则 R-既约模必与 R 的一个极小右理想（看作 R-模）同构. ▎

定理 6.4.5 设 R 有单位元 1，则 R 是单 Artin 环 $\Longleftrightarrow R_R$ 是有限个互相同构的 R-既约模的直和.

证 "$\Rightarrow$". 设 R 是单 Artin 环. 由定理 6.4.2 知

$$R_R=\sum_{i=1}^{n}\oplus N_i. \tag{1}$$

其中每一 N_i 都是 R 的极小右理想，亦即是 R-既约模. 设 N_i, $i=1,\cdots,n$, 中与 N_1 作为 R-模同构的刚好是（需要时重新编号）前 $r\geqslant 1$ 个.

今证 $I=N_1+\cdots+N_r$ 是 R 的理想. 首先，若 N 是 R_R 的一个既约子模且有 $N\cong N_1$，则必有 $N\subseteq I$. 这是因为，利用直和(1)，设 φ_i 是 R_R 到 N_i 上的投射，则 φ_i 是模 N 到 N_i 的一个同态对应. 由于 N 是既约模，φ_i 或是同构对应 或是零同态对应. 但已知 N 和 N_j, $j>r$, 是不同构的，所以 φ_j, $j>r$, 必是零同态对应. 故 $N\subseteq N_1+\cdots+N_r=I$. 这样 I 是 R_R 中所有与 N_1 同构的子模的和.

其次，任意取定 $a\in R$. 易见

$$\varphi:\quad N_i\to aN_i$$
$$x\mapsto ax$$

是模 N_i 到模 aN_i 的同态对应. 由 N_i 的既约性，φ 或者是同构对应，此时由上面的讨论，有 $aN_i\subseteq I$；或 φ 是零同态对应，此时 $aN_i=0$. 故右理想 I 有性质 $aI\subseteq I$，即 I 是非零理想. 由于 R 是单

环，故有 $R=I$. 即知(5)中所有 N_i 都是彼此同构的.

"$\Leftarrow$". 设$R=\sum_{i=1}^{n}\oplus N_i$，$N_i$ 是环 R 的极小右理想且作为 R-模它们彼此同构. 由定理 6.4.1 知 R 是半单环. 由定理 6.4.4，还知 R 的每一极小右理想，作为 R-模必与某个 N_i 同构，因而它们作为 R-模彼此同构. 若 R 非单 Artin 环，则 $R=R_1\oplus\cdots\oplus R_n$，$R_i$ 是单 Artin 环而 $n>1$. 此时易见含于不同的 R_i 的极小右理想，作为 R-模，彼此必不同构. 此矛盾说明 R 是单 Artin 环. ▎

作为上面定理的推论，我们给出

定理 6.4.6 设 R 是半单环，则有

$R=N_1\oplus\cdots\oplus N_m$，其中 N_i 是 R 的极小右理想，

$R=R_1\oplus\cdots\oplus R_n$，其中 R_i 是 R 的极小理想.

若用 I_i 表示环 R_i 中的一个极小右理想，则还有

(1) R_i 恰是 R 中一切与 I_i，作为 R-模，同构的极小右理想之和；

(2) R_i 恰是 N_j，$j=1,\cdots,m$，中一切与 I_i，作为 R-模，同构者之和. ▎

定理 6.4.7 设 R 是半单环，若有

$$R=\sum_{i=1}^{n}\oplus N_i=\sum_{j=1}^{m}\oplus M_j,$$

其中 N_i，M_j 都是 R 的极小右理想，则必有 $n=m$ 且 $N_i\cong M_{\pi(i)}$（作为 R-模），其中 π 是 $1,\cdots,n$ 的一个置换.

这个定理是定理 6.3.2 的直接推论，也是关于 R-模的 Jordan-Hölder 定理的一个直接推论.

定理 6.4.8 设 R 是单 Artin 环，则 R 的任意两个极小右理想，作为 R-模是彼此同构的. ▎

现在我们能证明§1 中所说的：带有单位元的 Artin 环必是 Noether 环. 为此先引入：

定义 6.4.1 R-模 M 称为 Artin 模(Noether 模) 若对子模有极小(大)条件.

类似于§1命题4,可有:

预理 2 M 为 R-模,N 为其子模,若 M/N, N 都是 Artin(Noether)模,则 M 亦是 Artin(Noether)模. ▎

现在可证:

定理 6.4.9 若 R 是 Artin 环且有单位元,则 R 是 Noether 环.

证 R 是 Artin 环,故有幂零根,记作 N. 作理想链:

$$R\supseteq RN\supseteq RN^2\supseteq\cdots\supseteq RN^m=0.$$

考虑 $A_k=RN^{k-1}/RN^k$, A_k 自然可看成 R-模. 然而由于 $A_kN=(RN^{k-1}/RN^k)N=\bar{0}$, A_k 也可看成 $R/N=\bar{R}$ 上模,这是因为我们可以定义模运算:

$$x\bar{a}=xa,\ \forall x\in A_k,\ a\in R,\ \bar{a}\in R/N.$$

利用 $A_kN=\bar{0}$ 可直接检验此定义是合理的, 且符合模运算的条件. 这样 A_k 看成 R-模和看成 $\bar{R}$-模作用相同. 由 $\bar{1}\in\bar{R}$,A_k 是 $\bar{R}$-模,$\bar{R}$是半单的,据定理 6.4.3 得 A_k 是完全可约 $\bar{R}$-模. 注意到 A_k 的 R-子模均形如 B/RN^k,其中 B 是介于 RN^{k-1} 和 RN^k之间的 R 的右理想, R是 Artin 环, 有极小条件, 故 A_k 作为 R-模有极小条件. 从上述知 A_k 的 R-子模和 A_k 的 $\bar{R}$-子模是一回事, 故 A_k 作为$\bar{R}$-模也有极小条件. 这样从定理 6.3.3 (注意到 $\bar{1}\in\bar{R}$) 得出 A_k 是有限个既约 $\bar{R}$-模的直和: $A_k=M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_n$.

据此可得一个长度有限的,比如说 n,的组成列:

$$0\subset M_1\subset M_1\oplus M_2\subset\cdots\subset M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_n=A_k.$$

这样据 Schreier 定理 A_k 中任一个子模的升链:

$$0\subset M_1'\subset M_2'\subset\cdots\subset M_m'\subset\cdots$$

必可加细成为组成列,而组成列长度均为 n, 故 A_k中任一子模升链长度不超过 n,这导致 A_k 对子模有极大条件.

上述讨论对 k 未加任何限制, 故对任何 k 成立.而 $RN^{m-1}=A_{m-1}$,$RN^{m-2}/RN^{m-1}=A_{m-2}$, 用预理 2 得 RN^{m-2} 对 R-子模有

极大条件. 利用 RN^{m-2} 和 $RN^{m-3}/RN^{m-2}=A_{m-2}$ 同样可导出 RN^{m-3} 是 Noether R-模,如此逐个类推,经有限步即可导出 R 是 Noether R-模. 而 R 作为 R-模,其子模就是右理想,故说 R 是 Noether R-模就是说 R 对右理想有极大条件,即 R 是Noether环.|

许永华[1]给出了极小条件包括极大条件的一个充要条件.

最后,我们举一个 Artin 半单环的实例:

定理 6.4.10(Maschke) G 是阶数为 n 的有限群,F 是特征不整除 n 的域,则 $F[G]$ 是 Artin 半单的.

为证明此定理,先作些准备. 设 M, N 是 $F[G]$-(右)模,因 G 含有单位元,在等同 $F\cdot 1$ 和 F 之后,有 $F\subseteq F[G]$,故 M,N 也是 F-模. 若 α 是 $M\to N$ 的一个 F-模同态,则从 α 可诱导出一个 $M\to N$ 的 $F[G]$-模同态 $\tilde{\alpha}$:

$$\tilde{\alpha}: M\to N$$
$$x\mapsto \sum_{g\in G}\alpha(xg^{-1})g, \forall x\in M.$$

由 M,N 是 $F[G]$-(右)模,知上述定义是有确切意义的,保持加法运算是易见的. 而 $\forall g_0\in G$,有 $\tilde{\alpha}(xg_0)=\sum_{g\in G}\alpha(xg_0g^{-1})g$.

令 $g_0g^{-1}=h$. 因 G 是有限群,故当 g 历遍 G 中元时,h 也历遍 G 中元,故有

$$\sum_{g\in G}\alpha(xg_0g^{-1})g=\sum_{h\in G}\alpha(xh)h^{-1}g_0=\Big[\sum_{h\in G}\alpha(xh)h^{-1}\Big]g_0$$
$$=[\tilde{\alpha}(x)]g_0,$$

即 $\tilde{\alpha}$ 是一个 $M\to N$ 的 $F[G]$-模同态.

欲证 $F[G]$ 是 Artin 半单的,据定理 6.4.3 知只要证明任意的 $F[G]$-模 M 均是完全可约的就够了. 下面就来证此.

定理 10 的证明: 设 M 是任意的 $F[G]$-模,L 是其任意 $F[G]$-子模,把 M 看成 F-模,此时 L 亦是 M 的 F-子模. 而域上的模均是完全可约模,故 L 是 M 的直和项,这样 M 到 L 上的投影 α 是一个 F-模同态,使得 $\alpha(l)=l, \forall l\in L$. 据上说明可从 α 诱导出一个 $M\to L$ 的 $F[G]$-模同态 $\tilde{\alpha}$. 由 F 的特征不能整除 n,知

$\frac{1}{n}$在 F 中是有意义的. 令 $\varphi=\frac{1}{n}\tilde{\alpha}$. φ 亦是 $M\to L$ 的$F[G]$-模同态，且对 $\forall\ l\in L$ 有：

$$\varphi(l)=\frac{1}{n}\tilde{\alpha}(l)=\frac{1}{n}\sum_{g\in G}\alpha\ (lg^{-1})g=\frac{1}{n}\sum_{g\in G}(lg^{-1})g=\frac{1}{n}\cdot nl=l,$$

即 $\varphi|_L=\alpha$. 故 $\overline{M}=M/\ker\ \varphi\cong L$.

由 L, $\ker\varphi$ 均为 M 的 $F[G]$-子模，故 $M\supseteq L+\ker\varphi$. 另一方面，对 $\forall\ m\in M$ 有 $\overline{m}\in L$，故有 $m=l+n, l\in L, n\in\ker\ \varphi$，即 $M\subseteq L+\ker\varphi$，故$M=L+\ker\ \varphi$.对 $\forall x\in L\cap\ker\varphi$，由 $x\in L$ 得：$\varphi(x)=\alpha(x)=x$. 由 $x\in\ker\ \varphi$，得 $\varphi(x)=0$，故 $x=0$. 即 $L\cap\ker\varphi=0$. 由此得 $M=L\oplus\ker\ \varphi$. 这正是我们要证的，故定理得证. ❙

该说一下的是：上定理中当 F 的特征为 $p\neq0$ 的情况，曾作为更一般的一个定理的推论在第二章中得出过.

§ 5 单 Artin 环的构造

我们考察除环 D 上所有 n 阶矩阵组成的环 D_n. 与域 F 上的全矩阵代数 F_n 的情况类似，容易证明 D_n 是单环. 又由于 D_n 可看作除环 D 上的右(或左)向量空间，其维数为 n^2，而 D_n 的每一右理想必是子向量空间，故 D_n 关于右理想满足极小条件，因而 D_n 是单 Artin 环.

反过来，我们将证明单 Artin 环必是除环上的全矩阵环. 即本节的主要结果是下面的

定理 6.5.1 (Wedderburn-Artin)

(一) R 是单 Artin 环$\Longleftrightarrow R=D_n$，其中 D 是除环，n 是自然数；

(二) 若单 Artin 环 $R=D_n=D'_m$，其中 D, D' 是除环而 n, m 是自然数，则必有 $D\cong D'$, $n=m$.

这是有限单代数的结构定理的很完整的推广.

这个定理有许多不同的证明方法，我们在这里介绍其中的一种．首先作一些准备．

定理 6.5.2 设环 R 没有非零的幂零单侧理想．e 是 R 的一个幂等元，则下述命题是等价的：

（一）eR 是极小右理想，

（二）Re 是极小左理想，

（三）eRe 是除环．

证 （一）$\Rightarrow$（三）．由 e 是幂等元，所以 eRe 是以 e 为单位元的环．为了证明 eRe 是除环，任取 $0\neq a\in eRe$．显然 $a\in eR$，因而 $aR\subseteq eR$．易见 $aR\neq 0$．由假设 eR 是极小右理想，故 $aR=eR$，因而 $aRe=eRe$．又因为 $a=ae$，故得 $a(eRe)=eRe$．这样，在 eRe 中 a 至少有一个右逆元 b，有 $ab=e$．因此 eRe 是除环．

（三）$\Rightarrow$（一）．此时已知 eRe 是除环．设 $I=eR$．并设 I' 是含于 I 中的非零右理想．若 $I'e=0$，则 $I'I'\subseteq I'I=0$，这与假设 R 中没有非零的幂零单侧理想是矛盾的．因而 I' 中含有形如 eae 的非零元素．但 eRe 是除环，故有 ebe 使 $eae\cdot ebe=e$．这样，$e\in I'$，因而 $I'=I$．这就证明了 $I=eR$ 是极小右理想．

由于 eRe 是左右对称的，仿上可证（二）和（三）是等价的．|

定理 6.5.3 设 R 是单 Artin 环．设 eR 是 R 的极小右理想，e 是幂等元．则 $N=Re$ 是除环 eRe 上的 m 维右向量空间，其中 m 等于 R 的表为极小右理想的直和中直和项的个数．

证 由于 $I=eR$ 是极小右理想，依上定理，知 $N=Re$ 是极小左理想而 $D=eRe$ 是除环．由于

$$ND=NeRe\subseteq Re=N,$$

且 D 的单位元 e 也是 N 的右单位元，故加群 N 可看作 D 上的右向量空间．

任取 N 中 n 个 D-线性无关的元素 $a_1e,\cdots,a_ne$．今证

$$\sum_{i=1}^{n}a_ieR=a_1eR\oplus\cdots\oplus a_neR. \tag{1}$$

首先，$0\neq a_ie\in a_ieR$ 以及 eR 是极小右理想，知 a_ieR 是极小右理

想. 其次,设

$$a_1ex_1+\cdots+a_nex_n=0,\ x_i\in R,\ \forall i. \tag{2}$$

为了证明(1),只需证由(2) 可得其左侧每一项都是零. 若其中有一,说是 $a_1ex_1\neq 0$,则有

$$a_1ex_1\in a_1eR\cap\sum_{i=2}^{n}a_ieR,$$

又因 a_1eR 是极小右理想,故得

$$a_1eR\subseteq\sum_{i=2}^{n}a_ieR.$$

这样,由 $a_1e\in a_1eR$,便有

$$a_1e+a_2ey_2+\cdots+a_ney_n=0,\ y_i\in R,\ \forall i.$$

用幂等元 e 右乘上式,即得

$$a_1e\cdot e+a_2e\cdot ey_2e+\cdots+a_ne\cdot ey_ne=0,$$

a_ie 的系数 $e,ey_2e,\cdots,ey_ne$ 都在 $eRe=D$ 中而 $e\neq 0$, 这与 a_ie, $i=1,\cdots,n$,是 D-线性无关是矛盾的. 由之得证(1).

由于 R-模 R_R 是完全可约模,(1)可扩充成为 R 的极小右理想的直和. 设 R 可表为 m 个极小右理想的直和,则依定理 6.4.7, R 的任意这种直和表示中都恰由 m 个极小右理想组成. 所以 $n\leqslant m$. 这样 D-向量空间 N 的维数必小于或等于 m.

设 N 在 D 上的维数为 n, 则 $N=a_1D+\cdots+a_nD$, 其中 a_i, $i=1,\cdots,n$, 是其基. 但 $N\cdot eR=ReR$ 是非零理想,由 R 的单性得 $R=N\cdot eR$, 所以, 注意到 $D\cdot eR=eRe\cdot eR=eR$ 便得 $R=a_1eR+\cdots+a_neR$. 但 a_ieR 是极小右理想, 依定理 6.4.7 知 $n\geqslant m$. 与刚证结果合在一起就得 $n=m$. ▎

下面我们继续使用上面定理中所用的符号. 设 $a_1,\cdots,a_m$ 是 D 上右向量空间 N 的基. 由于 N 还是左 R-模且还有

$$(xa)d=x(ad),\ \forall x\in R,\ a\in N,\ d\in D.$$

因而 R 中元素 x 对 N 的作用必确定 N 的一个 D-线性变换,随之确定 D 上的一个 $m\times m$ 矩阵. 详细的说,就是:设 $xa_i=b_i$,

$$x(a_1,\cdots,a_m)=(xa_1,\cdots,xa_m)=(b_1,\cdots,b_m)$$
$$=(a_1,\cdots,a_m)A_x,$$
其中 $A_x=(d_{ij}),d_{ij}\in D$. 直接验证可知
$$\varphi: \quad R\to D_m$$
$$x\mapsto A_x$$
是环 R 到 D_m 内的同态对应.

为了证明 Wedderburn-Artin 定理中的(一), 只要证明 φ 是 R 到 D_m 上的一一对应就够了. 我们把这个结论写成下面的

定理 6.5.4 设 R 是单 Artin 环. $a_1,\cdots,a_m$ 是把极小左理想 $N=Re$ 看作是除环 $D=eRe$ 上右向量空间时的基 而 $b_1,\cdots,b_m$ 是 N 中任意一组元素, 则存在且仅存在一个元素 $x\in R$, 使 $xa_i=b_i,i=1,\cdots,m$.

证 易见
$$B=\{x\in R\mid xa_i=0,i=1,\cdots,m\}=\{x\in R\mid xN=0\}$$
是 R 的理想. 但 R 的单位元 1 不在 B 中, 再由 R 的单性知 $B=0$. 这样, 若 $xa_i=x'a_i,i=1,\cdots,m$, 则 $x-x'\in B$, 即 $x=x'$. 这就证明了最多只有一个元素 $x\in R$ 满足条件 $xa_i=b_i,i=1,\cdots,m$.

今证确有元素 $x\in R$ 满足 $xa_i=b_i$, $i=1,\cdots,m$. 为此只需证明确有 $x_i\in R$ 满足 $x_ia_i=b_i$, $x_ia_j=0$, $i\neq j$, 因为那时只要取 $x=\sum_{i=1}^{m}x_i$ 即为所求. 只说明 x_m 的存在就够了. 令
$$C=a_1eR+\cdots+a_{m-1}eR,$$
则 C 是 R 的右理想, $C\neq R$, 因为 C 只是 $m-1$ 个极小右理想的和. 设 e' 为 C 的幂等生成元: $C=e'R$. 易见 $(1-e')C=(1-e')e'R=0$. 但 $a_i\in C,i=1,\cdots,m-1$, 故 $(1-e')a_i=0,i=1,\cdots,m-1$. 这样, 就不能再有 $(1-e')a_m=0$, 否则将有 $(1-e')R=0$ 而 $1-e'\neq0$, 但这是不可能的. 这样 $0\neq R(1-e')a_m\subseteq Re=N$. 但 N 为极小左理想, 故 $R(1-e')a_m=N$. 因而有 $y\in R$, 使 $y(1-e')a_m=b_m$. 取 $x_m=y(1-e')$, 它就是所要求者. ▎

有了这个定理，φ 便是 R 到 D_m 上的同构对应. 这样定理 6.5.1 的(一) 便证完了.

为了证明定理 6.5.1 的唯一性部分(二)，先证下面一些结果.

命题 1 设 e 是环 R 的幂等元，则 R-模 eR 的自同态环 $\text{End}_R(eR)$ 与 eRe 是反同构的.

证 任取 $\phi\in\text{End}_R(eR)$，由于 e 是模 eR 的一个生成元，故 φ 由元素 $e\varphi=a$ 完全确定且若 $\varphi_1\neq\varphi_2$，则必 $e\varphi_1\neq e\varphi_2$. 由 $a=e\varphi=(ee)\varphi=(e\varphi)e=ae\in Re$ 知 $a\in Re\cap eR=eRe$. 这样对应

$$\theta:\ \text{End}_R(eR)\to eRe$$
$$\phi\mapsto e\phi$$

是 $\text{End}_R(eR)$ 到 eRe 内的一一对应.

任取 $a\in eRe$，注意到 $aeR\subseteq eR$，故若规定

$$\varphi_a:\ eR\to eR$$
$$y\mapsto ay,$$

则易见 $\varphi_a\in\text{End}_R(\text{eR})$ 且 $\text{e}\varphi_a=ae=a$. 这样 θ 是 $\text{End}_R(eR)$ 到 eRe 上的一一对应.

直接验证可知 θ 是此两环之间的反同构对应. 例如我们看一下乘法运算：

$$(\varphi_1\varphi_2)\theta=e(\varphi_1\varphi_2)=(e\varphi_1)\varphi_2=(e(e\varphi_1))\varphi_2$$
$$=(e\varphi_2)(e\varphi_1)=(\varphi_2\theta)(\varphi_1\theta).\ \ |$$

定理 6.5.5 设 R 是单 Artin 环，而 eR, fR 是两个极小右理想，e, f 是幂等元，则有

(一) $\text{End}_R(eR)\cong\text{End}_R(fR)$ 且是除环，

(二) $eRe\cong fRf$ 且是除环.

证 (一) eR 是极小右理想以及 R 有单位元，因而 eR 是 R-既约模. R-既约模的自同态或是自同构或是零自同态，故 $\text{End}_R(eR)$ 是除环. 由定理 6.4.8 知，单Artin环的极小右理想作为 R-模是彼此同构的，因而它们的自同态环亦是彼此同构的. 故得(一).

（二）由（一），利用命题1即得（二）。▮

定理6.5.1中（二）的证明：已知 $R=D_n=D'_m$，其中 D, D' 是除环．我们来考察 D_n．设 D 的单位元为1，令 $e_{ij}, i, j=1, \cdots, n$，表示矩阵单位的全体，则

$$1=e_{11}+\cdots+e_{nn},$$

$$D_n=e_{11}D_n\oplus\cdots\oplus e_{nn}D_n\text{（右理想的直和）}.$$

易见 $e_{ii}D_ne_{ii}\cong D$，故 $e_{ii}D_ne_{ii}$ 是除环，因而 $e_{ii}D_n$ 是极小右理想．这样 $D_n=R$ 是 n 个极小右理想的直和．

若考察 D'_m 而令 $f_{ij}, i, j=1, \cdots, m$，为其矩阵单位的全体，仿前同样可从 $f_{ii}D'_mf_{ii}\simeq D'$ 导出 $f_{ii}D'_m$ 为极小理想，D'_m 是 m 个极小右理想的直和．

但已知 $R=D_n=D'_m$．而单Artin环表成极小右理想的直和时，依定理6.4.7，其中所含极小右理想的个数是唯一确定的，故得 $m=n$。又依定理6.5.5有

$$D\cong e_{11}D_ne_{11}=e_{11}Re_{11}\cong f_{11}Rf_{11}=f_{11}D'_mf_{11}\cong D'.\ ▮$$

Artin环的理论与群的表示论有密切的联系参看Curtis, Reiner(1)．下面第七章和第九章的一些内容可看作Artin环理论的进一步发展．谢邦杰[2]中讨论了半极小条件环是Artin环沿另一方向的推广．本章中一些定理，特别是Wedderburn-Artin定理可由下章相应的结果得出．

用投射模和入射模的语言叙证Wedderburn-Artin定理是很有趣的，这方面可参看Jans(1)．

Artin结合环的理论已非常完整地推广到交错Artin环——也就是对单侧理想有极小条件的交错环上去．平行地，对所谓二次理想（相当于结合环的单侧理想）有极小条件的Jordan环也有了相当完整的理论．这方面可参看Живлаков等(1)．

学习本章时读一下Artin, Whaples[1]是很有益的．

习　题

1．有单位元没有零因子的右Artin环是除环．

2. 证明一切 2×2 上三角矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$，其中 a 是整数，b，c 是有理数，作成右 Noether 环但不是左 Noether 环。

3. 证明一切 2×2 上三角矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$，其中 a 是有理数，b，c 是实数，作成右 Artin 环，但不是左 Artin 环。

4. 设 R 是有单位元的 Artin 环，则 R 的每个极大左理想都包含 R 的幂零根。

5. 域 F 上的一个向量空间是完全可约 F-模。

6. 证明关于有单位元的环 R 的下列条件等价：

(i) 每一个右 R-模是完全可约的；

(ii) 右 R-模 R_R 是完全可约的；

(iii) 每一个左 R-模是完全可约的；

(iv) 左 R-模 ${}_RR$ 是完全可约的。

7. 设 N 是 Artin 环 R 的幂零根，M 是左 R-模，若 $NM=0$，则 M 是完全可约模。

8. 设 Re 是半单 Artin 环 R 的极小左理想，e 是幂等元。M 是不含真子模的左 R-模。则 $M\cong Re$ 当且仅当 $eM\neq 0$。

9. 单 Artin 环 R 的每个右理想 J 是一个右零化子。

第七章 环的 Jacobson 理论

回顾一下前几章关于有限代数和 Artin 环的研究，可以得到这样一种讨论结构问题的格式：欲考察某一代数系统类W(例如有限代数)的结构，先选定一特殊的、较简单的子类U(例如有限单代数)．取 $R\in W$．考虑R的一切理想(同态对应的核)$I_\alpha, \alpha\in\Omega$，有性质：商代数系统 $R/I\in U$．令 $N=\bigcap_{\alpha\in\Omega} I_\alpha$，可称 N 为R的根．这样R/N可表成U中的代数系统的亚直和(参看定理 5.2.1)，即它们在某种意义上可通过U中的代数系统去刻划而组成某个特定类S．另一方面，R 的根N的性质实际上也由 U 确定了，它们组成另一较特殊的代数系统类V．这样对R的结构的研究便在一定程度上归结为对U中较简单的代数系统的研究以及对V中较特殊的代数系统的研究．

根据前几章的结果，我们有下述特殊情形．

设W是域F上有限代数类而取U为有限单代数类，则V为有限幂零代数类，S为有限半单代数类，S中代数可表为U中有限个代数的直和．这是代数的 Wedderburn 理论．

设 W是 Artin 环类而取U为单 Artin 环类，则V为幂零环类，S为半单 Artin 环类而S中的环可表为U中有限个环的直和，这就是环的 Artin 理论．

在本章中，将研究一般(指不附加任何条件)结合环的结构．选取本原环(见下面§1)作为特殊的、简单的环类U而利用上述格式去讨论．这就是环的 Jacobson 理论，它是 Artin 环理论的一个很好的推广．

§ 1　本原环与 Jacobson 根

设M是可换加群而 $E=\mathrm{End}(M)$是其全自同态环，任取环E的子环R，易见M可看成是R-模. 要求此R-模M具有一些特殊性质，这样我们就在全自同态环E中划分出一些特殊子环.

定义 7.1.1　设 $E=\mathrm{End}(M)$而R是环E的子环.若R-模M是R-既约模，就称R为既约环.

在任意环中，可用下述方法划分出一些特殊环类.

定义 7.1.2　设R为环，如果R有一个忠实既约右模M，即有性质：

(一) R-模M是R的忠实模，亦即 $Ma=0, a\in R$ 当且仅当 $a=0$，

(二) M是 R-既约模，

此时便称R为右本原环. 相应地可定义左本原环. 以后简称右本原环为本原环.

关于本原环的例子我们将在第三节介绍. 这里我们只指出环(0)不是本原环，因为它没有忠实既约模.

命题 1　R是既约环$\Longleftrightarrow$$R$是本原环.

证　"$\Rightarrow$". 设R是既约环，则依定义，有一加群M，$R\subseteq \mathrm{End}(M)$且$R$-模$M$是既约模. 由于$R$的元素就是$M$的自同态对应，故 $Ma=0, a\in R$ 当且仅当$a=0$，即M是忠实模.故R是本原环.

"$\Leftarrow$". 设R是本原环，则依定义，R有忠实既约模M. 因为M是R-忠实模，故模M决定的环R到 $\mathrm{End}(M)$内的同态对应是同构对应，即R可看成 $\mathrm{End}(M)$的子环. 又由M是R-既约模，故得R是既约环. ▎

设U是所有本原环组成的类而R是任意环. 我们来考察R的所有同态对应φ，使 $R\varphi\in U$. 也就是考察R的所有理想I，有性质：R/I 是本原环.

定义 7.1.3 称环R的理想I为本原理想，如果R/I是本原环.

因为 $R/R=(0)$ 不是本原环．故 R 本身不是 R 的本原理想．

定义 7.1.4 R 是环．如果 R 没有本原理想，则定义 R 本身是 R 的 Jacobson 根；如果 R 有本原理想，则定义 R 的 Jacobson 根为 R 的所有本原理想 $I_\alpha, \alpha\in\Omega$，的交 $\bigcap_{\alpha\in\Omega} I_\alpha$．$R$ 的 Jacobson 根记作 $J(R)$．

显然，环 R 的 Jacobson 根 $J(R)$ 是 R 的理想．由于在本原环的定义中我们使用右 R-模，所以更准确的说，这样定义的 Jacobson 根应记作右Jacobson 根．

下面我们来给出 Jacobson 根的另一种刻划方法．

为了方便我们约定下面这种说法：加群 M 是 R-模，也是 R'-模．R-模 M 给出环 R 到 $\mathrm{End}(M)$ 的子环 R_1 上的同态对应；同样 R'-模 M 给出环 R' 到 $\mathrm{End}(M)$ 的子环 R_1' 上的同态对应．如果 $\mathrm{End}(M)$ 的这两个子环 R_1 和 R_1' 相重合，就说 R-模 M 和 R'-模 M 是**等效的**．易见，若 R-模 M 和 R'-模 M 是等效的，则 M 的子群 N 是 R-子模当且仅当 N 是 R'-子模．

定义 7.1.5 设 N 是 R-模 M 的子模．规定

$$(N:M)=\{x\in R\,|\,Mx\subseteq N\}.$$

特别当 $N=0$ 时，$(0:M)$ 称作 R-模 M 的零化子，并记作 $A(M)$．

易见，$(N:M)$ 是环 R 的理想．特别，$A(M)$ 是 R 的理想．

设 M 是 R-模而 $A(M)(\subseteq R)$ 是其零化子．任取 R 的理想 $I\subseteq A(M)$．令 $\bar{R}=R/I, a\in R, \bar{a}$ 表示含 a 的、I 的剩余类．注意到 $MI=0$，则若规定模运算：

$$x\bar{a}=xa,\quad x\in M,\quad a\in R, \tag{1}$$

易见，此运算与剩余类 $\bar{a}$ 的代表选择无关，并使 M 成为 $\bar{R}$-模，容易证明 R-模 M 和 $\bar{R}$-模 M 是等效的．

反之，设 I 是环 R 的理想，$\bar{R}=R/I$ 而 M 是 $\bar{R}$-模，若规定

$$xa=x\bar{a},\quad x\in M,\quad a\in R,\quad \bar{a}=a+I\in\bar{R}, \tag{2}$$

则关于此模运算，M 成 R-模而 I 含在 R-模 M 的零化子中且 $\bar{R}$-模 M 和 R-模 M 是等效的．

为了引用方便，把上面这种 R-模 M 和 R/I-模 M 等效性的结

果，概括成下面的

命题 2 R-模 M 和 R/I-模 M，其中理想 I 含在 R-模 M 的零化子中，是等效的. ▎

命题 3 I 是环 R 的本原理想 $\Longleftrightarrow I=A(M)$，其中 M 是一个 R-既约模.

证 "$\Leftarrow$". 设 M 是 R-既约模而 $I=A(M)$，则依命题 2，R-模 M 和由(1)定义的 R/I-模 M 是等效的，因而 M 是 R/I-既约模. 由 $I=A(M)$ 又知 R/I-模 M 是忠实的，这是因为，若 $M\bar{a}=0$，$\bar{a}\in R/I$，则 $Ma=0$，$a\in R$，因而 $a\in A(M)=I$，故 $\bar{a}=\bar{0}$.

"$\Rightarrow$". 设 I 是环 R 的本原理想，则 R/I 是本原环，因而 R/I 有忠实既约模 M. 依命题 2 R/I-模 M 和由(2)定义的 R-模 M 是等效的. 由 R/I-模 M 是既约的得 R-模 M 是既约的. 由于 R/I-模 M 是忠实的，故若对 $a\in R$，有 $0=Ma$，则依(2)有 $M\bar{a}=0$，故 $\bar{a}=\bar{0}$，随之 $a\in I$，即 R-模 M 的零化子 $A(M)\subseteq I$. 另一方面，显然有 $I\subseteq A(M)$，故 $I=A(M)$. ▎

由命题 3，我们便得到与定义 7.1.4等价的另一种定义 Jacobson 根的方法. 这就是下面的

定理 7.1.1 R 是环，如果没有既约 R-模，则 R 本身是 R 的 Jacobson 根；如果有既约 R-模，则 R 的 Jacobson 根为 R 的所有既约模 M_α，$\alpha\in\Omega$，的零化子 $A(M_\alpha)$ 的交 $\bigcap_{\alpha\in\Omega}A(M_\alpha)$. ▎

定义 7.1.6 若环 R 的 Jacobson 根 $J(R)=0$，则称之为半本原环或 Jacobson 半单环，记作 J-半单环.

定理 7.1.2 设环 R 的 Jacobson 根为 $J(R)$，则 $R/J(R)$ 是半本原环.

证 令 M_α，$\alpha\in\Omega$ 是所有的 R-既约模. 依上面定理 $J(R)=\bigcap_{\alpha\in\Omega}A(M_\alpha)$. 这样 $J(R)\subseteq A(M_\alpha)$，$\alpha\in\Omega$，因而若令 $\bar{R}=R/J(R)$，则依命题 2，R-模 M_α 和依(1)定义的 $\bar{R}$-模 M_α 是等效的，故 M_α 是 $\bar{R}$-既约模. 由(1)易见，$\bar{R}$-模 M_α 的零化子是 $A(M_\alpha)/J(R)$. 这样 $\bar{R}$ 的 Jacobson 根

$$J(\bar{R})\subseteq\bigcap_{\alpha\in\Omega}(A(M_\alpha)/J(R))=J(R)/J(R)=\bar{0},$$

故$\bar{R}=R/J(R)$是半本原的. ▎

定理 7.1.3 R 是半本原环$\Longleftrightarrow R$ 是本原环的亚直和.

证 "$\Rightarrow$".设R是半本原环,则$J(R)=\bigcap_{\alpha\in\Omega}I_\alpha=0$,其中 I_α 是R的本原理想. 依定理 5.2.2,R 是商环 $R/I_\alpha,\alpha\in\Omega$ 的亚直和. 但每一 R/I_α都是本原环,故R是本原环的亚直和.

另一方向的证明留给读者. ▎

§ 2 Jacobson 根的内刻划

今后,Jacobson 根将简写成 J-根.

上节中环R的 J-根是通过本原理想或 R-既约模来刻划的. 这些刻划都需要借助环R以外的 R-模的语言. 能不能用环R的内部语言去刻划 J-根而使我们能从另一个角度弄清 J-根的含意呢!回答这个问题的关键是把 R-既约模的零化子概念通过环R的语言来刻划.

设M是 R-模,$m\in M$.令$(0:m)=\{x\in R\mid mx=0\}$. 易见$(0:m)$是$R$的右理想,称之为元素 m 的零化子或阶右理想(这是因为,它类似群中元素的阶). 显然$A(M)=(0:M)=\bigcap_{m\in M}(0:m)$. 这样我们可以通过$(0:m)$来刻划 $A(M)$.

定义 7.2.1 环R的一个右理想T叫做正则的, 如果存在一元素 $e\in R$,使 $x-ex\in T,\forall x\in R$.

命题 1 若M是 R-既约模,则对任意 $0\neq m\in M$,$(0:m)$是 R 的极大右理想且是正则右理想.

证 设 M 是 R-既约模. 令 $T=(0:m),0\neq m\in M$. 若 T 不是 R 的极大右理想,则有右理想 S,有

$$T\subset S\subset R \tag{1}$$

由(1)得$mS\neq 0$; 又由 M 的既约性,故有 $mS=M=mR$.这样对任意 $a\in R$, 有 $s\in S$ 使 $ma=ms$,即 $a-s\in T$,因而 $a\in s+T\subseteq S$,即

$R=S$. 这是和(1)矛盾的,故得 T 是 R 的极大右理想.

由 $M=mR$,知有 $e\in R$,使$m=me$. 这样对任意$x\in R$,$mx=mex$,故 $x-ex\in T$,即T是正则右理想. ▎

命题 2 若T是环R的极大右理想,正则右理想,则存在一个 R-既约模 M 及 $m\in M$,使 $T=(0:m)$.

证 由于T是正则右理想,故有 $e\in R$ 使 $x-ex\in T$,$\forall x\in R$,即$x\in T+ex\subseteq T+R^2$,故$R\subseteq T+R^2$,从而$R=T+R^2$.由于T是极大右理想,即是 R-模 R 的极大子模. 于是 R-模 R/T 无非零真子模. 又由于 $T+R^2=R$ 知 $R^2\nsubseteq T$,故 $R/T\cdot R=R^2/T\neq 0$. 即得 R/T 是 R-既约模. 取模 R/T 中的元素 $e+T$. 由于 $e\notin T$ (否则将导致 $R=T$,而这是不成立的),故 $e+T\neq 0+T$. 注意到 $ex\in T$ 当且仅当 $x\in T$,便得 $T=(0:e+T)$. ▎

定理 7.2.1 R是环,W是 R 中一切极大右理想,正则右理想T的集合,则 $J(R)=\bigcap_{T\in W}T$.

证 由定理 7.1.1,$J(R)=\bigcap_{\alpha\in\Omega}A(M_\alpha)$,$M_\alpha$是 R-既约模. 由命题 2,得

$$J(R)=\bigcap_{\alpha}A(M_\alpha)=\bigcap_{\alpha}(0:M_\alpha)=\bigcap_{\substack{m\in M_\alpha\\ \alpha\in\Omega}}(0:m)\subseteq\bigcap_{T\in W}T.$$

由命题 1 得

$$\bigcap_{T\in W}T\subseteq\bigcap_{\substack{m\in M_\alpha\\ \alpha\in\Omega}}(0:m)=\bigcap_{\alpha\in\Omega}(0:M_\alpha)=J(R).$$

故得

$$J(R)=\bigcap_{T\in W}T. \quad ▎$$

极大右理想,正则右理想是用环R的内部语言刻划的. 这样上定理给出 J-根的内定义.

以前我们看到Artin环R的幂零根是一切幂零右理想的和.关于一般环R的 J-根是由具有哪些特性的右理想或元素组成的呢?

设 a 是R中的元素. 若R有单位元 1 而 $1+a$ 有右逆元,并将此右逆元表成 $1+a'$,则有$(1+a)(1+a')=1$,即

$$a+a'+aa'=0. \tag{2}$$

易见，若 a 是幂零元素，则 $1+a$ 是有右逆元和左逆元. 这样，在一般环 R 中有性质 (2) 的元素 a 可看作幂零元素的一种推广. 我们给出下面的

定义 7.2.2 R 是环，R 的元素 a 叫做右拟正则元，如果有 $a'\in R$，使 (2) 成立. 并称 a' 为元素 a 的一个右拟逆元. 相应地可以定义左拟正则元和左拟逆元.

环 R 的右理想叫做右拟正则的，如果它的每一元素都是右拟正则的.

每一元素都是幂零元素的右理想，叫做幂零元右理想.

命题 3 环 R 的任意幂零元右理想都是右拟正则右理想.

证 设 T 是幂零元右理想. 任意 $a\in T$，a 是幂零元，$a^n=0$. 取 $a'=-a+a^2+\cdots+(-a)^{n-1}$. 直接验证得 $a+a'+aa'=0$，即 a 是右拟正则元. 故 T 是右拟正则右理想. ▎

利用 R 的元素 a 可以确定 R 的一个正则右理想 $J(a)=\{x+ax, x\in R\}$. 如果 a 是右拟正则元则有 $a'\in R$ 使 $a+a'+aa'=0$，于是 $a=-a'+a(-a')\in J(a)$. 反之，如果 $a\in J(a)$，则有 $c\in R$，$a=c+ac$，即 $a+(-c)+a(-c)=0$，即 a 是右拟正则元. 故 a 是右拟正则元当且仅当 $a\in J(a)$. 这个事实可以看作是利用正则右理想 $J(a)$ 给出的右拟正则元的另一种定义.

为了用拟正则概念来刻划 J-根，先证

命题 4 环 R 的任一正则右理想 $S\neq R$ 必可扩大成 R 的一个极大右理想、正则右理想.

证 由 S 的正则性，知有 $e\in R$，使 $x-ex\in S$，$\forall x\in R$. 这样，易见任意含 S 的右理想都是正则的. 因而只需找一个含 S 的极大右理想就行了. 令 W 是 R 中一切含 S 的真右理想的集合. 若 $T\in W$，则 $e\notin T$，因为不然将由 $x-ex\in S\subseteq T$ 而得 $T=R$. 这样，W 中任意升链：$T_1\subseteq T_2\subseteq\cdots\subseteq T_n\subseteq\cdots$，它的并 $T=\bigcup_{n=1}^{\infty}T_n$ 必也不含 e，因而 T 是 R 中含 S 的真右理想，即 $T\in W$. 随之我们可以应用 Zorn 引

理知W中必有极大元，这也就是说R中有含S的极大右理想T．▎

在下面常将$a-xa$记作$(1-x)a$，虽然环R中不一定有单位元1．这样，在R中即使$1-x$没有意义，但$(1-x)a$以及$a(1-x)$等都是有意义的．例如，易见，$(1-x)R=\{(1-x)a, \forall a\in R\}$是$R$的正则右理想，而$a$是右拟正则元当且仅当有$a'\in R$，使$(1+a)a'=-a$。

定理 7.2.2 设环R的J-根是$J(R)$，则

(一) $J(R)$是R中最大的右拟正则理想，

(二) $J(R)$包括一切右拟正则右理想．

证 先证(二)．设S是右拟正则右理想．任取$a\in S$，则ax，$\forall x\in R$，都是右拟正则的．令M是R-既约模并设$a\notin A(M)$．这样必有$m\in M$，$ma\neq 0$．由M的既约性，有$maR=M$．故有$x\in R$，使$max=m$，即$m-max=0$．取$(-ax)$的一个右拟逆元y，则由$0=m(1-ax)$得

$$0=m(1-ax)(1+y)=m(1+(-ax))(1+y)=m.$$

这与m的取法矛盾．故知对任意R-既约模M有$a\in A(M)$，因而$a\in\bigcap A(M)=J(R)$。

今证(一)．设$a\in J(R)$且a不是右拟正则元．若$(1+a)R=R$，则易见a将是右拟正则元，故有$(1+a)R\neq R$。但$(1+a)R=(1-(-a))R$是R的正则右理想，依命题4，存在极大正则右理想T，有$(1+a)R\subseteq T$．即对任意$x\in R$，$x+ax\in T$．但依定理7.2.1，$J(R)\subseteq T$，故$a\in T$，因而$T=R$。这与T的意义矛盾．故a必是右拟正则元，即$J(R)$是右拟正则理想．再用(二)便得(一)．▎

上面这个定理还可以改进．

为此，首先，如果我们把上面的讨论中的“右”都换成“左”，我们便得左 Jacobson 根以及与关于右 Jacobson 根相平行的下述结果：

定理 7.2.3 设I是环R的左 Jacobson 根，则

(一) $I=\bigcap A(M')$，其中M'取遍一切左R-既约模，

(二) $I=\bigcap T'$，其中T'取遍R的一切正则极大左理想，

（三） I 是 R 中最大的左拟正则理想，

（四） I 包含 R 的一切左拟正则左理想．|

其次，我们来证明：左拟正则理想必是右拟正则理想，反之亦然．今考虑 R 中一元素 a，它既是右拟正则元又是左拟正则元．这时便有 $b, c\in R$，使

$$a+b+ba=0,\ a+c+ac=0. \tag{3}$$

为了计算方便，对 R 添加一个单位元 1，(3)就变成

$$(1+b)(1+a)=1,\ (1+a)(1+c)=1.$$

这时当然有

$$1+b=(1+b)(1+a)(1+c)=1+c,$$

即 $b=c$。如果不引进单位元而直接计算，这就是

$$ac+bc+bac=0,\ ba+bc+bac=0.$$

由之有 $ac=ba$. 再由 (3) 便得 $b=c$. 这是说，同一元素的右拟逆元和左拟逆元（如果都存在的话）必相等．

设 I 是右拟正则理想．I 中元素 a 有右拟逆元 a'：$a+a'+aa'=0$。由之，$-a'=a+aa'$，因为I是理想，故 $a'\in I$.因而 a'有右拟逆元 a''。但等式 $a+a'+aa'=0$ 说明 a' 以 a 为左拟逆元．故由上面讨论知 $a=a''$。这就是说

$$a+a'+a'a=0.$$

此式说明 a 是左拟正则元．即证得右拟正则理想必是左拟正则理想．同样可证，反过来也对．

利用这个事实并注意到定理 7.2.2 的（一）和定理 7.2.3 的（三），便知对任意环 R，其 Jacobson 根和左 Jacobson 根是一致的．随之定理 7.2.2 可改进如下：

定理 7.2.4 设环 R 的 J-根为 $J(R)$，则

（一） $J(R)$是最大右拟正则理想，也是最大左拟正则理想，

（二） $J(R)$包括一切右拟正则右理想，

（三） $J(R)$包括一切左拟正则左理想，

（四） $J(R)$包括一切幂零元单侧理想．

拟正则的概念是用环 R 的内部语言刻划的，这样上定理给出

又一个用环R的内部语言刻划J-根的方法。

§3 本原环的结构

上两节中我们刻划了环R的J-根$J(R)$，并知$R/J(R)$是J-半单环而任意J-半单环都是本原环的亚直和。本节中给出本原环的结构。

设R是单环，则$J(R)=R$或$J(R)=0$。Jacobson曾提出问题：是否存在单环R而$J(R)=R$，或简言之，是否存在单J-根环？这已在Sasiada[1]中正面的解决了。除了单J-根环外，其余的单环R都是J-半单的，因而它有本原理想。这样R的唯一不等于R的理想$\{0\}$应是它的本原理想，亦即R是本原环。这样本原环在一定意义上是单环的推广。下面看本原环的一些例子。

例 1 设D是除环而M是D上n维左向量空间。考虑$\mathrm{End}_D(M)$。易见它和D_n，D上n阶全矩阵环同构。显然，当把M看成是$\mathrm{End}_D(M)$-模时，M是$\mathrm{End}_D(M)$的忠实既约模。因而$\mathrm{End}_D(M)$是本原环。这也就是说，依单Artin环的结构定理知，单Artin环是本原环。

例 2 设D是除环而M是D上可数维左向量空间。说M的线性变换φ是m秩的，如果$M\varphi$，即M在φ下的象是m维空间。令R是M的一切有限秩线性变换的全体，则易见R是全线性变换环$\mathrm{End}_D(M)$的真子环，并且M是R-忠实既约模。这样R是本原环。同时我们还看到，$\mathrm{End}_D(M)$中含R的子环都是本原环。当然$\mathrm{End}_D(M)$本身也是本原环。由于任意线性变换与有限秩线性变换之积仍是有限秩线性变换，故R是$\mathrm{End}_D(M)$的真理想。这样$\mathrm{End}_D(M)$，以及它一切真含R的子环，都是本原环但不是单环的例子。

我们附带提一下，不难证明例2中的R是单环。因而，依单Artin环的结构定理，它是单环而非单Artin环的一个例子。

下面我们来讨论本原环的结构。

设 R 是本原环而 M 是它的忠实既约模.由于M是 R-忠实模,故 R 可以看成是 $\mathrm{End}(M)$的子环.另一方面,M是R-既约模,M可以很自然地看成是一个除环上的向量空间.为此,考虑 $\mathrm{End}_R(M)$,即 R-模 M 的一切自同态的全体. 注意到 M 的既约性,其自同态或是自同构或是零自同态,故 $\mathrm{End}_R(M)$是除环. 这样便得

Schur 预理 M 是 R-既约模,则 $\mathrm{End}_R(M)$是除环.

这里应提一下的是,容易看到,实际上 $\mathrm{End}_R(M)$就是子环 R 在环 $\mathrm{End}(M)$内的中心化子.

这样 M 便是除环 $\mathrm{End}_R(M)$ 的右向量空间. 为了记法的方便,我们把它改造成左向量空间. 为此引进与 $\mathrm{End}_R(M)$反同构的环D. 当然D也是除环. 令 φ 是D到 $\mathrm{End}_R(M)$上的反同构对应. 规定

$$dm=m(d\varphi),\ d\in D,\ m\in M. \tag{1}$$

则易验证,此模运算使 M 成为D的左向量空间,例如,对任意 d_1, $d_2\in D, m\in M$,

$$(d_1d_2)m=m((d_1d_2)\varphi)=m((d_2\varphi)(d_1\varphi))=d_1(d_2m).$$

有时称与 $\mathrm{End}_R(M)$反同构的D为 R-模 M 的中心化子(不要和子环的中心化子混淆),并记作 $C(M)$.

由(1)知,左 D-向量空间 M 和 R-模 M 有下面重要性质: R-模 M 的任意自同态都可以由用 D 中一元素左乘来实现. 除此之外, 还有

$$(dm)a=d(ma),\ \forall d\in D,\ m\in M,\ a\in R, \tag{2}$$

这是因为,由(1)并注意到 $d\varphi\in\mathrm{End}_R(M)$,有

$$(dm)a=(m(d\varphi))a=(ma)(d\varphi)=d(ma).$$

由(2)得 $R\subseteq\mathrm{End}_D(M)$.

定义 7.3.1 M是除环D上的左向量空间. R 是全线性变换环 $\mathrm{End}_D(M)$的一个子环. 说R是M上的稠密线性变换环,或简称稠密环,如果对任意自然数 n,以及M中任意两组元素 $x_1,\cdots,x_n$; $y_1,\cdots,y_n$,其中 $x_1,\cdots,x_n$是 D-线性无关的,都有$a\in R$,使 $x_ia=y_i$, $i=1,\cdots,n$.

上两例中的环 R 都是稠密环.

下面由 Jacobson 和 Chevalley 给出的定理是本原环结构理论的基本定理.

定理 7.3.1(稠密定理) 设 R 是本原环而 M 是 R-忠实既约模. 设 $D=C(M)$,则 R 是 D 上左向量空间 M 的稠密线性变换环.

证 为了证明定理,只要证明下面的

命题 A 对 D 上左向量空间 M 的任意有限维子空间 V 及元素 $m\notin V$,可找到 $a\in R$,使 $Va=0$ 而 $ma\neq 0$.

这是因为,此时对 M 中任意给定的元素 $x_1,\cdots,x_n$ 和 $y_1,\cdots,y_n$,其中 $x_1,\cdots,x_n$ 是 D-无关的,若令 V_i 是 $x_j,j\neq i,j=1,2,\cdots,n$,支撑的子空间,则依上命题A,有 $a_i\in R$,使 $V_ia_i=0$ 而 $x_ia_i\neq 0$. 由 M 的 R-既约性,有 $x_ia_iR=M$, 即有 $x_ia_ib_i=y_i$. 令 $a=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$,则 a 即有所求性质: $x_ia_i=y_i,i=1,\cdots,n$.

下面对 M 的子空间 V 的维数作归纳法来证命题A.

先把 V 写成 $V=V_0\oplus Dw$, 其中子空间 V_0 的维数等于 V 的维数减1而 $w\in V,w\notin V_0$. 并任取 $m\notin V$.依归纳假设,对 V_0 及 $w\notin V_0$ 言, 命题A是成立的.因而若设 $A(V_0)=\{a\in R|V_0a=0\}$,则有 $wA(V_0)\neq 0$. 由 M 的 R-既约性以及 $wA(V_0)$ 是 M 的子模,得 $M=wA(V_0)$.

若对 V,m 言,命题A不成立,即是有:

$$Va=0\Rightarrow ma=0,\forall a\in R. \tag{3}$$

今证这是不可能的. 注意到任意 $x\in M$ 必有 $x=wa$, $a\in A(V_0)$. 我们规定

$$\varphi:\quad M\to M$$
$$wa\mapsto ma.$$

若是 $wa=wa'$, $a,a'\in A(V_0)$, 则 $w(a-a')=0$, $a-a'\in A(V_0)$, 即有 $V(a-a')=0$. 这样由(3)有 $m(a-a')=0$,即 $ma=ma'$. 这就说明了 φ 的定义是合理的. 直接验证知 φ 是 R-模 M 的自同态. 由定理前面的一段讨论中, 知 φ 对 M 的作用可用 D 中一元素左乘来实现,即有 $d\in D$,

$$dwa=ma,\quad \forall a\in A(V_0),$$

即有 $(dw-m)A(V_0)=0$. 但对 V_0 言命题A成立，因而 $dw-m\in V_0$,即 $m\in V_0+Dw=V$,这和 m 的取法是矛盾的. 故(3)不成立,即对 V 言命题A也成立. 由归纳法即得命题A. ❘

稠密环当然有忠实既约模. 事实上，若 R 是除环 D 上左向量空间 M 的稠密线性变换环，则 M 就是一个 R-忠实既约模. 再注意到我们曾证过本原环和既约环的等价性,便有

定理 7.3.2 设 R 是环,则下述性质是等价的:

(一) R 是本原环,

(二) R 是既约环,

(三) R 是稠密环. ❘

作为定理 7.3.1 的推论,我们有

定理 7.3.3 R 是本原环,则有一除环 D,或者对某一自然数 n 有 $R\cong D_n$, 或者对任意自然数 m, 都有 R 的子环 $S_{(m)}$ 同态于 D_m. ❘

定理 7.3.4 交换本原环 R 必是域.

证 本原环 R 必是某一除环 D 上左向量空间 M 的稠密环. 如果 M 的维数 $(M:D)>1$,则易见 R 必是不交换的,故 $(M:D)=1$. D 上一维空间 M 上的稠密环 R 必同构于 D, 这样 R 又是交换又是除环,故 R 是域. ❘

我们回头看一下,定理 7.3.1 说明些什么?

设 E 是环而 R 是它的子环. R 在 E 内的中心化子是 R' 而 R' 在 E 内的中心化子是 R'', 易见 $R\subseteq R''$. 特别当 $R=R''$ 时, 我们说子环 R 有**双中心化子性质**.

若取 $E=\mathrm{End}(M)$, 其中 M 是交换加群, 而 $R\subseteq E$ 是既约环, 则 R 在环 $\mathrm{End}(M)$ 中的中心化子 $R'=\mathrm{End}_R(M)$, 而 R' 在 $\mathrm{End}(M)$ 中的中心化子 $R''=\mathrm{End}_{R'}(M)$. 注意到定理 7.3.1 前面的讨论及所用符号,知 R'-模 M 相应的左模是左 D-向量空间 M, 故

$$R''=\mathrm{End}_{R'}(M)=\mathrm{End}_D(M).$$

由上知 $R\subseteq R''$,因而有

$$R \subseteq \mathrm{End}_D(M) = R''.$$

定理 7.3.1 说明，当 R 是既约环时，虽然仍不一定有 $R=R''$，但却知道 R 在 R'' 中是“稠密”的，即对 $R''=\mathrm{End}_D(M)$ 中的任一元素 a'' 在 M 中任意有限子空间 N 上的作用都可以通过 R 中的元素 a_N 来实现：

$$xa'' = xa_N, \quad \forall x \in N. \tag{4}$$

我们在定义 7.3.1 中，用(4)给出了稠密环的代数定义．为了从拓扑的观点解释一下稠密环的意义，我们在除环 D 的左向量空间的全线性变换环 $R''=\mathrm{End}_D(M)$ 内引进拓扑：如下规定元素 O 的邻域系

$$x^{\perp} = \{a \in R'' \mid xa = 0\}, \quad \forall x \in M.$$

易见 $x^{\perp}$ 是 R'' 的右理想．利用环 R'' 的加法运算，规定 R'' 中任意元素 a 的邻域系为 $a+x^{\perp}$．这些邻域系使 R'' 成为拓扑空间，并且 R'' 的运算在此拓扑空间中是连续的，这样 R'' 成为拓扑环．这样引进来的拓扑通常称作**有限拓扑**或 Jacobson **拓扑**．

此时我们有：全线性变换环 R'' 的子环 R 是稠密环当且仅当子环 R 在 Jacobson 拓扑下的闭包等于整个 R''，亦即在 Jacobson 拓扑意义下，集合 R 在 R'' 中是稠密的．这是因为，(4)式恰好说明，R'' 中任意元素 a'' 的每一个邻域内都必含有 R 中的元素．这就是对稠密环的拓扑解释．

§ 4 对 Artin 环的应用

第六章中关于 Artin 环的主要结果可以作为推论由环的 Jacobson 理论得出。在本节中我们来作这件事。

定理 7.4.1 （一）设 R 是 Artin 环，则 R 的 J-根 $J(R)$ 是幂零理想，

（二）Artin 环 R 的幂零根和 J-根是一致的。

证 （一）设 $J=J(R)$。考虑理想降链：

$$J \supseteq J^2 \supseteq \cdots \supseteq J^m \supseteq \cdots.$$

由于R是Artin环，故必有n，使$N=J^n=J^{n+1}=\cdots=J^{2n}=\cdots$。若$N=0$，则(一)获证。设$N\neq 0$。考虑

$$W=\{T\text{是}R\text{的右理想}\mid T\subseteq N\text{且}TN\neq 0\}.$$

由于$NN=J^{2n}=J^n=N\neq 0$，故$N\in W$。这样W不空，因而依极小条件，W中有极小元T_0。

因为$T_0N\neq 0$，故有$b\in T_0$，使$bN\neq 0$。但bN是右理想且含于N而$bN\cdot N=bN\neq 0$，故$bN\in W$。再由$bN\subseteq T_0$以及T_0的极小性，得$bN=T_0$。因而有$x\in N$，使$bx=b$。但$x\in N\subseteq J(R)$，知$-x$有右拟逆元x'。这样利用以前常用的方法，便得

$$0=(b-bx)(1+x')=b(1+(-x))(1+x')=b.$$

这与b之选择矛盾。故$J^n=N=0$，即$J(R)$是幂零的。

(二) 设R是Artin环。由于$J(R)$包含一切幂零元理想，故$J(R)$包含R的幂零根。由(一)知$J(R)$本身是幂零的，故$J(R)$等于R的幂零根。∎

上定理的(二)说明，一般环的J-根是Artin环幂零根的一个推广。

由于$J(R)$包含R中一切幂零元单侧理想，这样作为上定理的推论，我们再一次的得到Hopkin的下述结果：

推论 Artin环的每一幂零元单侧理想是幂零的。∎

定理 7.4.2 R是Artin环，则下述三命题是等价的：

(一) R是本原环，

(二) R是单环，

(三) $R\cong D_n$，其中D_n是除环D上的全矩阵环。

证 (一)⇒(三)。由稠密定理知，本原环R可看成$R''=\mathrm{End}_D(M)$的一个稠密子环，其中M是除环D上的左向量空间。今证R是Artin环时，M必是有限维的。若不然，则M是无限维的，因而M中有可数无限多个D-线性无关元素$\{x_i,\ i=1,2,\cdots\}$。令$x_1,\cdots,x_k$支撑的子空间为M_k，而

$$T_k=(0:M_k)=\{x\in R\mid M_kx=0\},\ k=1,2,\cdots,$$

则T_k是右理想且$T_1\supseteq T_2\supseteq\cdots$。又由$R$是稠密环，故必有$a_k\in R$，

使 $a_k \in T_k$ 而 $a_k \notin T_{k+1}$，因而有

$$T_1 \supset T_2 \supset \cdots \supset T_n \supset \cdots.$$

这和 R 是 Artin 环相矛盾. 故证得 M 是有限维的. 此时 $R \subseteq \mathrm{End}_D(M) \cong D_n$。再由 R 的稠密性便得 $R = \mathrm{End}_D(M) \cong D_n$.

(三)⇒(二). 这是易证的.

(二)⇒(一). R 是单环，则 R 的幂零根为零，依定理 7.4.1 (二)，R 的 J-根亦为零，即 R 是 J-半单的. 这样 R 有本原理想. 再由 R 的单性，知 R 的本原理想只能是 0，故 R 是本原环. ▎

在上面(一)⇒(三)的证明，我们得到

$$R = R'' = \mathrm{End}_D(M) \subseteq \mathrm{End}(M).$$

这就是说，当 R 是 Artin 环且是本原环时，把 R 看作 $\mathrm{End}(M)$ 的子环时，R 有双中心化子性质.

上定理的证明中没有利用第六章中的结果，因而可看作是单 Artin 环结构定理的另一个证明.

对于半单 Artin 环的结构定理也可以通过 J-半单环的结构定理推导出来，也就是说，Artin 环 R 若能表成本原环的亚直和，则可推得环 R 必是有限个单 Artin 环的直和. 然而我们不在这里讨论而把它留给读者去作.

§ 5 有极小单侧理想的本原环

我们从本原环类中选择一个子类——有极小单侧理想的本原环，作进一步的讨论. 它介乎单 Artin 环与本原环之间.

首先我们作一些准备，即介绍一下对偶空间的概念.

定义 7.5.1 D 是除环，E 是 D 上左向量空间，F 是 D 上右向量空间. 设 (x, y) 是定义在 $E \times F$ 上（其中 $x \in E$ 而 $y \in F$），而在 D 中取值的双线性函数，即有

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y), \quad \forall \alpha_i, \beta_i \in D,$$
$$\forall x, x_i \in E,$$
$$(x, y_1\beta_1 + y_2\beta_2) = (x, y_1)\beta_1 + (x, y_2)\beta_2, \quad \forall y, y_i \in F.$$

我们称 (x, y) 为空间 E, F 的内积.

说内积 (x, y) 是非退化的,如果满足下面两个条件:

(一) $(x, F)=0$,则必 $x=0$,

(二) $(E, y)=0$,则必 $y=0$.

若空间 E, F 有一个非退化的内积,就称 E, F 是对偶空间,或 F 是 E 的对偶空间. 记作 $\{E, F, D, (x, y)\}$.

定义 7.5.2 E 是除环 D 上左向量空间.

$f: E\to D$ 是线性函数,即有

$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$, $\forall\alpha_1,\alpha_2\in D$, $x_1,x_2\in E$,

我们称 f 为 D-空间 E 的线性泛函.

命题 1 若 $\{x_i, i\in W\}$ 是除环 D 上空间 E 的一个 D-基,任意指定 D 中元素组 $\{\alpha_i, i\in W\}$,则有且仅有 E 的一个线性泛函 f,满足 $f(x_i)=\alpha_i, i\in W$. |

设 E^*为 D 上左空间 E 的一切线性泛函组成的集. 规定

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x),\ f_1,f_2,f\in E^*,$$

$$(f\alpha)(x)=f(x)\cdot\alpha,\ \alpha\in D,\ x\in E,$$

则易见 E^*成为 D 上右向量空间. 再规定

$$(x, f)=f(x), x\in E, f\in E^*, \tag{1}$$

则易见 (x, f) 是 E, E^*的内积,由命题 1 知 (x,f) 是非退化的. 故 E,E^*是对偶空间. 我们特称 E^*为 E 的**全对偶空间**.

设 F 是 E 的任意一个对偶空间,而 (x,y) 是它们的非退化内积. 对任意取定的 $y\in F$,规定

$$f_y: E\to D$$
$$x\mapsto(x,y),$$

则易见 $f_y\in E^*$,而

$$\varphi: F\to E^*$$
$$y\mapsto f_y$$

是 F 到 E^*内的 D-同态对应. 由 (x,y) 的非退化性,知若 $f_y=0$,即有 $(x,y)=0, \forall x\in E$,则必有 $y=0$. 这就是说 φ 是 F 到 E^*的一个子空间 F_1上的同构对应. 再注意到

$$(x,y)=(x,f_y),\ \forall x\in E,\ y\in F,\ f_y\in F_1.$$

因此，对偶空间 $\{E,F,D,(x,y)\}$ 与对偶空间 $\{E,F_1,D,(x,f_y)\}$ 依下面定义是等价的.

定义 7.5.3 说对偶空间 $\{E_1,F_1,D,(x,y)_1\}$ 与对偶空间 $\{E_2,F_2,D,(x,y)_2\}$ 是等价的，如果有 D-同构对应 $\varphi:E_1\to E_2$，$\psi:F_1\to F_2$，使 $(x,y)_1=(x\varphi,y\psi)_2$，$\forall x\in E_1$，$y\in F_1$.

这样，如果我们把等价的对偶空间相应地等同起来，上面的讨论说明 E 的任意对偶空间 F 都可以看作是 E^* 的子空间.

当然，E^* 的子空间并不都是 E 的对偶空间. 易见，$E,F\subseteq E^*$ 关于内积 (1) 是对偶空间当且仅当对 E 中任意一个非零元 x，都有属于 F 中的一个线性泛函 f，使 $f(x)\neq 0$，或者说，对 E 中任意两个不同元素 x_1,x_2，都有 F 中的线性泛函 f 能区分它们：$f(x_1)\neq f(x_2)$.

称 E^* 的子空间 F 为 E^* 的**稠密子空间**，如果 E,F 关于内积 (1) 是对偶空间.

下面看几个简单例子.

例 1 若 E 是除环 D 上 n 维左空间，n 是自然数，则 E^* 是 D 上 n 维右空间. 此时只有 E^* 本身是 E 的对偶空间，即 E^* 的稠密子空间只有 E^*.

例 2 设 E 是 D 上可数维左空间，$\{x_i,i=1,2\cdots\}$ 是它的一个基. 依命题 1，有唯一的线性泛函 f_i，有 $f_i(x_j)=\delta_{ij}$，$j=1,2,\cdots$. 易见 $\{f_i,i=1,2,\cdots\}$ 在 E^* 中生成的子空间 F 是 E^* 的稠密子空间. F 是 E^* 的真子空间，例如线性泛函 $f:f(x_j)=1$，$j=1,2,\cdots$，不在 F 中.

定义 7.5.4 设 $\{E,F,D,(x,y)\}$ 是对偶空间. 设子集 $S\subseteq E$，$T\subseteq F$，规定

$$S^{\perp}=\{y\in F\mid (S,y)=0\},$$
$$T^{\perp}=\{x\in E\mid (x,T)=0\}.$$

称 $S^{\perp\perp}=(S^{\perp})^{\perp}\subseteq E$ 为 E 的子集 S 的闭集. 如果 $S=S^{\perp\perp}$ 就称 S 为 E 中的闭集. 同样令 $T^{\perp\perp}=(T^{\perp})^{\perp}\subseteq F$，并称之为 T 的闭集.

定理 7.5.1 设 E 是 D 上左向量空间，而 E^* 是 E 的全对偶空间，F 是 E^* 的子空间，则 F 是 E^* 的稠密子空间 $\Longleftrightarrow F^{\perp\perp}=E^*$.

证 "$\Rightarrow$". 设 F 是 E^* 的稠密子空间，则依定义知，只有当 $x=0$ 时，才有 $(x,F)=0$，故 $F^{\perp}=\{0\}$. 此时显然有 $F^{\perp\perp}=0^{\perp}=E^*$.

"$\Leftarrow$". 若有 $F^{\perp\perp}=E^*$，则由 $(F^{\perp},E^*)=0$，知 $F^{\perp}=\{0\}$，而这就是说，仅当 $x=0$ 时才有 $(x,F)=0$，即 F 是稠密子空间. ▎

上定理说明稠密子空间的几何意义.

定义 7.5.5 设 $\{E,F,D,(x,y)\}$ 为对偶空间. 取

$$T\in \mathrm{Hom}_D(E,E),\ T^*\in \mathrm{Hom}_D(F,F).$$

若有 $(xT,y)=(x,yT^*)$，$\forall x\in E,y\in F$，则称 T,T^* 为共轭线性变换，或 T^* 是 T 的共轭线性变换.

命题 2 在上定义中，T 的共轭线性变换，若存在的话，必是唯一的.

证 设 T_1,T_2 是与 T 共轭的，则有

$$(xT,y)=(x,yT_1)=(x,yT_2),\ \forall x\in E,\ y\in F,$$

$$(x,y(T_1-T_2))=0,\ \forall x\in E,\ y\in F.$$

由内积的非退化性知 $y(T_1-T_2)=0$，$\forall y\in F$，故 $T_1=T_2$. ▎

设 $\{E,F,D,(x,y)\}$ 是对偶空间，令

$$L_F(E)=\{T\in \mathrm{Hom}_D(E,E)\mid T\text{ 有共轭线性变换 }T^*\in \mathrm{Hom}_D(F,F)\},$$

$$S_F(E)=\{T\in L_F(E)\mid T\text{ 是有限秩线性变换}\}.$$

容易看到，$S_F(E)\subseteq L_F(E)\subseteq \mathrm{Hom}_D(E,E)$，$L_F(E)$ 是环 $\mathrm{Hom}_D(E,E)$ 的子环而 $S_F(E)$ 是 $L_F(E)$ 的理想.

下面我们开始讨论有极小单侧理想的本原环 R 的结构. 先证

命题 3 若 R 是右（左）本原环而 A_1,A_2 是 R 的非零理想，则 $A_1A_2\neq 0$.

证 设 R 是右本原环而 M 是 R 的忠实既约模. 由 $A_1\neq 0$，必有 $0\neq x\in M$，使 $xA_1\neq 0$，故 $xA_1=M$. 若 $A_1A_2=0$，则有 $0=$

$xA_1A_2=MA_2$，但 $A_2\neq 0$，这和 M 的忠实性矛盾。故 $A_1A_2\neq 0$。▎

定理 7.5.2 设 R 是有极小单侧理想的本原环，则（一）R 有极小右理想且其每一极小右理想都是 R 的忠实既约模；R 的一切右 R-忠实既约模都是彼此同构的；（二）R 有极小左理想且其每一极小左理想都是左 R-忠实既约模。R 的一切左 R-忠实既约模都是同构的。

证 由于本原环没有非零单侧幂零理想，故若 R 有极小单侧理想，依定理 6.5.2，R 必同时又有极小右理想又有极小左理想，且它们具有形状 Re，eR，e 是幂等元。

R 的极小左理想 Re 显然是 R-既约模。它还是忠实模。因为，若 $0\neq a\in R$，$aRe=0$，则左理想 Re 的左零化子 A_1 是非零理想，而 A_1 的右零化子 A_2 也是非零理想且 $A_1A_2=0$，这与命题 1 是矛盾的。故知 Re 是左 R-忠实模。

设 M 是左 R-忠实既约模。由于 $Re\neq 0$，必有 $x\in M$，$Rex\neq 0$ 因而 $Rex=M$。易知

$$\varphi: Re\to M$$
$$ae\mapsto aex$$

是左 R-模 Re 和 M 间的同构对应。这样便得（二）。

类似地可得（一）。▎

有例子说明，在一般情况下右本原环不一定是左本原环（参看 Bergman[1]）。然而由上面定理我们有

推论 设 R 是有极小单侧理想的环，则 R 是右本原环当且仅当 R 是左本原环。

定义 7.5.6 设 R 是环。若 R 中无极小右（左）理想，则规定其右基层（左基层）为零；若 R 中有极小右（左）理想，则规定 R 的一切极小右（左）理想的和为 R 的右基层（左基层），记作 S（S'）。

命题 4 右基层 S（左基层 S'）是 R 的理想。

证 对 R 的每一左乘 $L_a: x\mapsto ax$，$x\in R$，是右 R-模 R 的自同态，因而 R 的任一极小子模，也就是极小右理想 T，在 L_a 下的象 aT 或是零或仍是极小右理想，故总有 $aT\subseteq S$。故 $aS\subseteq S$，因而

S 是 R 的理想. ∎

命题 5 若环 R 没有非零的幂零单侧理想，则 R 的右基层等于左基层：$S=S'$.

证 由定理 6.5.2，若 R 中有极小左理想则必有极小右理想，反之亦然. 故若 S,S' 中有一为零，另一个也必是零，因而有 $S=S'=0$.

仍由定理 6.5.2，R 中极小左理想必具形状 Re，e 是幂等元，而 eR 必是极小右理想，反之亦然. 这样，$e\in eR\subseteq S$，但 S 是理想，故 $Re\subseteq S$ 即 $S'\subseteq S$. 对称地可得 $S\subseteq S'$. 故 $S=S'$. ∎

当 $S=S'$ 时，我们称之为环 R 的**基层**.

定理 7.5.3 设 R 是有极小单侧理想的本原环，则(一) R 的基层 S 是 R 的最小理想；(二) S 本身是一个单环.

证 (一) 设 A 是 R 的非零理想而 Re 是 R 的任意极小左理想. 由命题 3 知 $Ae\neq 0$，因而 $A\cap Re\supseteq Ae\neq 0$，由 Re 的极小性得 $A\supseteq Re$，即 $A\supseteq S'=S$. 故 S 是 R 的最小理想.

(二) 设 B 是 S 的非零理想，若 $SBS=0$，则有

$$(BS)^2=BSBS=0.$$

但本原环 R 无非零幂零理想，故 $BS=0$. 若 $B\neq 0$，则 R 的非零理想 S 有非零的左零化子，这与命题 3 是矛盾的. 故 $B=0$，而这又与 B 的选择矛盾. 故知 $SBS\neq 0$. 这样 SBS 是 R 的非零理想，由上面的(一)知 $SBS\supseteq S$，即有 $B=S$. 因此环 S 没有真理想. 又由 R 是本原的，故 $S^2\neq 0$. 这样就得 S 是单环. ∎

定理 7.5.4 R 是有极小单侧理想的本原环 $\Longleftrightarrow$ R 是含有有限秩线性变换的稠密环.

证 "$\Rightarrow$". 设 R 是有极小单侧理想的本原环. 由稠密定理，本原环 R 可看成是某一除环 D 上左向量空间 M 的线性变换稠密环. 取 R 的一个极小右理想 eR，其中 e 是幂等线性变换. 今证 e 是秩为 1 的线性变换. 设有 $x,y\in M$，而 xe,ye 是 M 中 D-无关元素. 由 R 的稠密性，必有 $a\in R$，使 $xea=0$ 而 $yea\neq 0$，设 $T=\{b\in eR\mid xb=0\}$，则右理想 $T\neq 0$ 且 $T\subseteq eR$，由 eR 的极小性有 $T=eR$，

因而 $xe=0$. 这与 xe 之选择矛盾. 故 e 是秩为 1 的线性变换.

"$\Leftarrow$". 设 R 是稠密环, 含有有限秩线性变换 a. 取有限维子空间 Ma 的一个 D-基: $x_1,\cdots,x_n$ 以及一个 $y\in M$, 有 $ya=x_1$. 由 R 的稠密性, 知有 $b\in R$, 使 $x_1b=y$, $x_ib=0, i=2,\cdots,n$. 令 $e=ab$, 这样 Me 是一个以 y 为基的一维子空间且 $ye=y$. 此时易得 M 的一个 D-基: $y, y_\alpha, \alpha\in W$, 有

$$ye=y,\ y_\alpha e=0,\ \alpha\in W.$$

由之得 $e^2=e$, 即 e 是个秩为 1 的幂等线性变换.

今证 eR 是极小右理想. 任取 $0\neq ea\in eR$, 则有

$$y(ea)=x_1\neq 0,\ y_\alpha(ea)=0,\ \alpha\in W.$$

再由 R 的稠密性, 有 $b\in R$, 使 $x_1b=y$. 这就有

$$y(eab)=y, y_\alpha(eab)=0, \alpha\in W,$$

即 $(ea)b=e$, 即证得右理想 eR 的极小性. ❙

易见, 一个含有有限秩线性变换的稠密环 R, 它的基层恰是由 R 中一切有限秩线性变换组成.

定理 7.5.5 R 是有极小单侧理想的本原环 $\Longleftrightarrow$ 存在有对偶空间 $\{E, F, D, (x, y)\}$ 使 $S_F(E)\subseteq R\subseteq L_F(E)$.

证 "$\Leftarrow$". $\{E, F, D, (x, y)\}$ 是对偶空间. 任意取定 $x_0\in E$, $y_0\in F$. 令

$$\varphi=\varphi_{y_0x_0}:\quad \begin{array}{l} E\to E; \\ x\mapsto (x, y_0)x_0 \end{array}\qquad \varphi^*=\varphi^*_{y_0x_0}:\quad \begin{array}{l} F\to F. \\ y\mapsto y_0(x_0, y) \end{array} \tag{2}$$

由
$$(x\varphi, y)=((x, y_0)x_0, y)=(x, y_0)(x_0, y),$$
$$(x, y\varphi^*)=(x, y_0(x_0, y))=(x, y_0)(x_0, y)$$

知 φ, φ^* 是共轭, 且是秩为 1 的线性变换.

这样对任意 $x\in E, y\in F, \varphi_{yx}\in S_F(E)$.

利用这一点来证明 E 是 R 的既约模. 任取 $0\neq x\in E$. 注意到 E, F 是对偶空间, 必有 $y_0\in F$, 使 $(x, y_0)=1$. 这样对任意 $0\neq x_0\in E$, 都有 $\varphi_{y_0x_0}\in S_F(E)\subseteq R$, 使

$$x\varphi_{y_0x_0}=(x, y_0)x_0=x_0.$$

这就是说 E 中任意非零元 x 生成的 R-子模必等于整个 E, 即

E是R-既约模．另一方面，E显然是其线性变换环R的忠实模，故R是本原环．

今证R有极小单侧理想．为此取定E中的一个元x_0．令I是一切线性变换φ_{yx_0}，$y\in F$组成的集合．易见I对加法是封闭的．为了说明I是R的左理想，任取$\varphi\in R\subseteq L_F(E)$．注意到$L_F(E)$的定义知$\varphi$是有共轭变换$\varphi^*$．这样，对$x\in E$，

$$x\varphi\varphi_{yx_0}=(x\varphi,\ y)x_0=(x,\ y\varphi^*)x_0=x\varphi_{y_1x_0},$$

其中$y_1=y\varphi^*\in F$，这就是$RI\subseteq I$，即I是左理想．

I还是极小左理想．这是因为任取$0\neq\varphi_{y_0x_0}\in I$，注意到$E,F$是对偶空间，必有$x_1\in E$，使$(x_1,y_0)=1$．这时对任意$y\in F$，便有

$$\begin{aligned}x\varphi_{yx_1}\varphi_{y_0x_0}&=(x,y)x_1\varphi_{y_0x_0}=((x,y)x_1,y_0)x_0\\&=(x,y)(x_1,y_0)x_0=(x,y)x_0=x\varphi_{yx_0},\quad\forall x\in E,\end{aligned}$$

这也就是$\varphi_{yx_0}=\varphi_{yx_1}\varphi_{y_0x_0}$，即$\varphi_{y_0x_0}$生成的左理想必等于$I$，因而$I$是极小左理想．

"$\Rightarrow$"．设R是有极小单侧理想的本原环．由定理6.5.2，R有极小左理想Re，极小右理想eR，e是幂等元且eRe是除环．eR可看作eRe上的左空间；Re可看作eRe上的右空间．定义$eR\times Re$到eRe的一个函数

$$(ex,ye)=exye,\forall ex\in eR,\forall ye\in Re.\tag{3}$$

显然(ex,ye)是eRe-空间eR,Re的内积．它还是非退化的．因为若$(ex,Re)=0$，则$exRe=0$，由之有$(exR)^2=0$．但本原环R无非零幂零单侧理想，故$exR=0$．注意命题3知$ex=0$．类似地可得，若$(eR,ye)=0$必$ye=0$，即内积(3)是非退化的．

这样$\{eR,Re,eRe,(ex,ye)\}$是对偶空间．

对任意$a\in R$，令

$$\varphi_a:eR\to eR;\quad \varphi_a^*:Re\to Re.$$
$$ex\mapsto exa\qquad\qquad ye\mapsto aye$$

易见φ_a,φ_a^*是线性变换，由

$$(ex\varphi_a,\ ye)=(exa,ye)=exaye=(ex,aye)=(ex,ye\varphi_a^*)$$

知φ_a和φ_a^*是共轭的，故$\varphi_a\in L_{Re}(eR)$．令

$$\theta: R \to L_{Re}(eR).$$
$$a \mapsto \varphi_a$$

今证 θ 是单射. 由 eR 是 R 的极小右理想以及 $eR \cdot R \neq 0$ 知 eR 是 R-既约模. 又若有 $0 \neq x \in R$ 使 $eRx = 0$, 则右理想 eR 的右零化子不为零,此与命题 3 相违. 故 eR 又是 R-忠实模,即 eR 是 R-忠实既约模. 又若 $\varphi_a = 0$, 则 $eRa = 0$. 由 eR 是 R-忠实既约模,知 $a = 0$. 这就证明了 $\theta: a \to \varphi_a$ 是单射. 于是可认为 $R = R' \subseteq L_{Re}(eR)$.

剩下来要证的是 $S_{Re}(eR) \subseteq R'$. 由 R' 的稠密性,知 $L_{Re}(eR)$ 也是空间 eR 上的稠密环. 任取 $\varphi \in S_{Re}(eR)$. 令有限维子空间 $eR\varphi$ 的一个基是 $ex_1, \cdots, ex_n$, 则此时必有 $\psi_i \in L_{Re}(eR)$, 使 $(ex_j)\psi_i = \delta_{ij} ex_i$, 这样便有

$$\varphi = \varphi\psi_1 + \cdots + \varphi\psi_n,$$

而 $\varphi\psi_i \in S_{Re}(eR)$ 且 $\varphi\psi_i$ 是秩为 1 的. 因此欲证 $\varphi \in R'$, 只需证明 eR 的一切秩为 1 的且有共轭者的线性变换 ψ 都在 R' 中.

设 ex_0 是 $eR\psi$ 的基而 ψ^* 是 ψ 的共轭线性变换.取 $y_0 e \in Re$, 使 $(ex_0, y_0 e) = e$, 这是作得到的,因为 eR, Re 是对偶空间. 令 $ex\psi = g(ex)ex_0$, 其中 $g(ex)$ 是空间 eR 的线性泛函, $g(ex) \in eRe$, 则有

$$(ex, y_0 e\psi^*) = (ex\psi, y_0 e) = (g(ex)ex_0, y_0 e) = g(ex)e = g(ex).$$

用(2)中的符号,取 $\varphi_{y_1 e, ex_0}$, 其中 $y_1 e = y_0 e\psi^*$, 则有

$$ex\varphi_{y_1 e, ex_0} = (ex, y_1 e)ex_0 = (ex, y_0 e\psi^*)ex_0 = g(ex)ex_0,$$

即是 $\psi = \varphi_{y_1 e, ex_0}$.

$\varphi_{y_1 e, ex_0} \in R'$, 这是因为

$$ex\varphi_{y_1 e, ex_0} = (ex, y_1 e)ex_0 = exy_1 ex_0 = (ex)(y_1 ex_0),$$

故

$$\varphi_{y_1 e, ex_0} = \varphi_{y_1 ex_0} \in R'.$$

这样,取 $E = eR$, $F = Re$, $D = eRe$,即得定理. |

我们知道单 Artin 环 R 表成除环 D 上全矩阵环 D_n 时,其表示法是唯一的,即若 $R \cong D_n \cong D'_m$, D, D' 是除环,则必 $n = m$ 且 $D \cong$

D'. 一般本原环表成稠密环时我们没有相应的唯一性定理，但对有极小单侧理想的本原环，类似的唯一性定理是成立的. 先作一些准备.

设 M 是除环 D 上的左向量空间. 设 $S\subseteq \mathrm{End}_D(M)$. 说 S 是二重传递的，如对 M 中任意二个线性无关的元素 x_1, x_2，以及任意给定的元素 y_1, y_2，都有某个 $\varphi\in S$，使 $x_i\varphi=y_i$，$i=1,2$. 类似地可定义 n 重传递的概念. 易见稠密环 R 对任意自然数 n，都是 n 重传递的.

除环 D 中元素 d 去左乘 M 所确定的加群 M 的自同态记作 L_d: $x\mapsto dx$, $x\in M$. 令

$$L_D=\{L_d\,|\,d\in D\}.$$

易见 L_D 是 $\mathrm{End}(M)$ 的一个子环且与 D 反同构.

命题 6 设 M 是除环 D 上左向量空间. 若 $R\subseteq \mathrm{End}_D(M)\subseteq \mathrm{End}(M)$ 且 R 是二重传递环，则 R 在 $\mathrm{End}(M)$ 内的中心化子恰是 L_D.

证 显然，R 在 $\mathrm{End}(M)$ 内的中心化子是包含 L_D 的. 若 $c\in \mathrm{End}(M)$ 且有 $ac=ca$, $\forall a\in R$. 任取 $0\neq u\in M$，则 uc 和 u 是线性相关的. 因为不然，由 R 的二重传递性，必有 $a\in R$，使 $ua=0$, $(uc)a\neq 0$. 但这时将有 $(uc)a=(ua)c=0\,c=0$. 这是个矛盾. 故有 $d\in D$，使 $uc=du$. 再由 R 的二重传递性得，M 中任意元素 x 必可表成 $x=ub$, $b\in R$. 故

$$xc=(ub)c=(uc)b=(du)b=d(ub)=dx,\quad \forall x\in M.$$

即 $c=L_d\in L_D$. ∎

定义 7.5.7 称除环 D_1 上左向量空间 M_1 到除环 D_2 上左向量空间 M_2 的一个映射 φ 为半线性变换，如果(一) φ 是加群 M_1 到加群 M_2 的同态对应；(二) 存在一个 D_1 到 D_2 上的同构对应 σ，有

$$(dx)\varphi=(d\sigma)(x\varphi),\quad \forall d\in D,\quad x\in M.$$

如果需要明确指出 σ，则将半线性变换 φ 记作 (φ,σ).

若 (φ,σ) 是 M_1 到 M_2 上的一对一的、半线性变换，则易见 $(\varphi^{-1}, \sigma^{-1})$ 是 M_2 到 M_1 上的一对一的、半线性变换而对应 $a\mapsto$

$\varphi^{-1}a\varphi$ 是环 $\mathrm{End}_{D_1}(M_1)$ 到 $\mathrm{End}_{D_2}(M_2)$ 上的同构对应.

定理 7.5.6（唯一性定理） R_i 是除环 D_i 上 左向量空间 M_i 的稠密环；且有极小单侧理想，$i=1,2$. 若 ψ 是环 R_1 到 R_2 上的一个同构对应，则必存在 M_1 到 M_2 上的一个一对一的、半线性变换 φ，使 $a_1\psi=\varphi^{-1}a_1\varphi$, $\forall a_1\in R_1$.

证 把同构的环 R_1, R_2 依同构对应 ψ 等同起来而得一环，记作 R. 这时 R_i-模 M_i 都可看成 R-模 M_i. 但 R，依假设，是有极小单侧理想的本原环，这样，作为 R 的忠实既约模，依定理 7.5.2，R-模 M_i 之间有同构对应 φ. 把 φ 还原为 R_1-模 M_1 到 R_2-模 M_2 之间的同构对应（仍记作 φ）时，则有

$$(x_1a_1)\varphi=(x_1\varphi)(a_1\psi),\ \forall x_1\in M_1,\ a_1\in R_1.$$

把 a_1 看成 M_1 的自同态，$a_1\psi$ 看成 M_2 的自同态，这就是 $a_1\varphi=\varphi(a_1\psi)$，亦即

$$a_1\psi=\varphi^{-1}a_1\varphi, \forall a_1\in R_1. \tag{4}$$

剩下来要证的是 φ 还是 D_i 上向量空间 M_i 之间的半线性变换. 由于 φ 是加群 M_1 到加群 M_2 上的同构对应，故对应

$$\theta:\mathrm{End}(M_1)\to\mathrm{End}(M_2)$$
$$a_1\mapsto\varphi^{-1}a_1\varphi$$

是环 $\mathrm{End}(M_1)$ 到 $\mathrm{End}(M_2)$ 上的同构对应，而(4)刚好说明在同构对应 θ 下，$\mathrm{End}(M_1)$ 的子环 R_1 映到 $\mathrm{End}(M_2)$ 的子环 R_2 上去. 由命题 6 知，R_i 在环 $\mathrm{End}(M_i)$ 的中心化子为 L_{D_i}, $i=1,2$，且同构对应是保持中心化子的，故在 θ 下 L_{D_1} 同构地映到 L_{D_2} 上. 对应 θ_i: $d_i\mapsto L_{d_i}$, $\forall d_i\in D_i$, $i=1,2$，给出 D_i 到 L_{D_i} 上的反同构对应. 这样，对应

$$\sigma:D_1\to D_2$$
$$d_1\overset{\theta_1}{\mapsto}L_{d_1}\overset{\theta}{\mapsto}\varphi^{-1}L_{d_1}\varphi=L_{d_2}\overset{\theta_2}{\mapsto}d_2$$

就是 D_1 到 D_2 上的同构对应. 由

$$(d_1x_1)\varphi=x_1L_{d_1}\varphi=x_1\varphi\varphi^{-1}L_{d_1}\varphi=(x_1\varphi)L_{d_2}$$
$$=d_2(x_1\varphi)=(d_1\sigma)(x_1\varphi),$$

即得 (φ,σ) 是 D_1 上空间 M_1 到 D_2 上空间 M_2 上的半线性变换. ▌

作为上面定理的直接推论，下面是与定理 7.5.4 相应的唯一性定理.

定理 7.5.7 若把有极小单侧理想的本原环 R 表成除环 D_i 上左向量空间 M_i 上的稠密环 $R_i, i=1,2$，则在向量空间 M_1, M_2 间必存在一个一对一的、半线性变换 φ 且 $\varphi^{-1}R_1\varphi=R_2$. ▎

为了得出与定理 7.5.5 相应的唯一性定理，我们需要下面的

命题 7 设 R 是除环 D 上左向量空间 M 的二重传递线性变换环，则 R 是 D 上空间 M 的稠密环.

证 显然 M 是 R 的忠实既约模. 依命题 6, R 在 End(M) 的中心化子是 L_D. 这等于说, R-模 M 的中心化子 $C(M)$ 就是 D. 这样依定理 7.3.1 知, R 是 D 上空间 M 的稠密环. ▎

这里顺便指出，若 R 是 D 上空间 M 的一重传递线性变换环，则显然 R 是 End (M) 的一个既约子环. 但由于 R 在 End (M) 中的中心化子可能较 L_D 真正大，因而 R-模 M 的中心化子较 D 为小，故 R 不一定是 D 上空间 M 的稠密环. 上命题是说，二重传递环才必是 D 上空间 M 的稠密环.

定理 7.5.8 设 $\{E_i, F_i, D_i, (x, y)_i\}$ 是对偶空间，$i=1, 2$，而 $S_{F_i}(E_i)\subseteq R_i\subseteq L_{F_i}(E_i), i=1,2$ 且 $R_1\cong R_2$，则空间 E_1, E_2 之间必存在一个一对一的、半线性变换 φ 且有 $\varphi^{-1}R_1\varphi=R_2$.

证 在定理 7.5.5 的证明中，我们已经看到，形如

$$\varphi_{y_0x_0}: E_i \to E_i$$
$$x \mapsto (x, y_0)x_0$$

的线性变换属于 $S_{F_i}(E_i)$ 中. 由之易见 $S_{F_i}(E_i)$ 是一重传递环. 为了证明它还是二重传递的，只需证明对 E_i 中 D_i-无关的元素 x_1, x_2，必有 $S_{F_i}(E_i)$ 中某个元素 φ，使 $x_1\varphi=0$ 而 $x_2\varphi\neq 0$. 事实上，若这一点得到了证明，则对于 E_i 中 D_i-无关的 x_1, x_2 以及 E_i 中的任意元素 x'_1, x'_2，便有 φ 使 $x_1\varphi=0, x_2\varphi=z\neq 0$. 再由 $S_{F_i}(E_i)$ 的一重传递性，必 $\exists\psi$，使 $z\psi=x'_2$. 于是令 $\varphi_1=\varphi\psi$，便有 $x_1\varphi_1=0$, $x_2\varphi_1=x'_2$. 同理，有 φ_2 使 $x_1\varphi_2=x'_1, x_2\varphi_2=0$. 于是 $x_1(\varphi_1+\varphi_2)=x'_1, x_2(\varphi_1+\varphi_2)=x'_2$. 故 $S_{F_i}(E_i)$ 是二重传递环. 由 E_i, F_i 是对

偶空间，则必有 $y\in F_i$，使 $(x_1, y)=0$ 而 $(x_2, y)\neq 0$。这是因为，如果对任意 $y\in F_i$，(x_1,y) 和 (x_2,y) 同时为零或同时不为零。这时必可得非零元素 $d_1, d_2\in D_i, y_0\in F_i$，使

$$(d_1x_1, y_0)=1, \quad (d_2x_2, y_0)=1. \tag{5}$$

由于对任意 $y\in F_i$，也必有 $(d_1x_1, y), (d_2x_2, y)$ 同时为零或同时不为零，因而，注意到(5)，必有

$$(d_1x_1, y)=(d_2x_2, y),$$

这样就有

$$(d_1x_1-d_2x_2, y)=0, \ \forall y\in F_i,$$

而由 E_i, F_i 是对偶空间，这是不可能的．故必有 $y_1\in F_i$，使 $(x_1, y_1)=0$ 而 $(x_2, y_1)\neq 0$。

取 $\varphi=\varphi_{y_1x_0}$，则得

$$x_1\varphi_{y_1x_0}=(x_1, y_1)x_0=0, \quad x_2\varphi_{y_1x_0}=(x_2,y_1)x_0\neq 0,$$

即知 $S_{F_i}(E_i)$ 是二重传递的．

因而 R_i 是二重传递的．由命题 7，R_i 是 D_i 上空间 M_i 的稠密环．再由定理 7.5.6 即得本定理的结论．∎

由于利用 F_i 可定义 E_i 的闭集，因而 E_i 是有拓扑结构的．进一步还可证明，上定理中的 E_1 到 E_2 上的半线性变换还是拓扑空间 E_1 到拓扑空间 E_2 上的连续变换．请参看 Jacobson(2)

§ 6　本原代数与代数的 Jacobson 根

前几节中关于环的一些概念，如本原环、环的 J-根等，也都可以对域 F 上任意代数去定义。我们在第一章中已定义过代数 A 的代数模的概念以及代数模的既约性、忠实性等．这样，**本原代数**就是有忠实既约代数模的代数；代数 A 的**本原理想**就是 A 的既约代数模 M 的零化子 $(0:M)$；代数 A 的 J-根就是 A 的所有本原理想之交，等等．

在这一节中我们主要的目的是说明：代数 A 的 J-根和作为环的 A 的 J-根是相同的．为了把 A 作为代数看待还是当作环来

看待区分清楚，在本节中我们用“A的代数理想”指代数A的理想，用“A的理想”指环A的理想。

命题 1 设A是F上代数，则A的正则极大右代数理想就是A的正则极大右理想，反之亦然。

证 设J是A的正则极大右理想。显然有$A^2 \nsubseteq J$。今证J也是A的代数理想。对任一$\alpha \in F$，αJ是环A的右理想。若$\alpha J \nsubseteq J$，则由J的极大性，有$\alpha J + J = A$，随之

$$A^2 = (\alpha J + J)^2 = (\alpha J)(\alpha J) + (\alpha J)J + J(\alpha J) + J^2$$
$$\subseteq J(\alpha^2 J) + J(\alpha J) + J^2 \subseteq JA \subseteq J.$$

这与上矛盾。故$\alpha J \subseteq J$，$\forall \alpha \in F$。即J也是代数理想，从而J是A的正则极大右代数理想。

反之，若J是A的正则极大右代数理想，则J是A的一个正则右理想且异于A。依§2的命题4，J可扩大成A的一个正则极大右理想$J' \supseteq J$。但上面刚证过，这样的J'必是正则极大右代数理想，故$J = J'$，即J也是环A的正则极大右理想。 ▎

命题 2 设A是F上代数，则(一) 代数A的既约代数模M必是环A的既约模；(二) 环A的既约模M都有且仅有一种方式作成代数A的既约代数模。

证 (一) 为了证明代数模M是环A的既约模，只需证明，对任意$0 \neq x \in M$，有$xA = M$。xA显然是代数模M的子模。由代数模M的既约性，或者$xA = M$，或者$xA = 0$。若是后者，则x所生成的一维子空间N必是代数模M的子模。由M的既约性，知$M = N$，而将有$MA = NA = 0$，这与代数模M的既约性是矛盾的。故只能有$xA = M$。

(二) 设M是环A的既约模。为了把M定义为A的代数模，须把M弄成F上向量空间。为此任取一$0 \neq u \in M$。由M的既约性有$M = uA$。这样，M中任意元素必可写成ua，$a \in A$，欲使M成为A的代数模只能规定

$$\alpha(ua) = u(\alpha a), \quad \alpha \in F, \quad a \in A. \tag{1}$$

为了说明它确给出$F \times M$到M的一个运算，需证明：若$ub = 0$，

$b\in A$,则必也有 $u(ab)=0$。设$J=\{x\in A|ux=0\}$。由于 M 是 A 的既约模.故 J 是环 A 的正则极大右理想,因而依上命题知 J 也是 A 的代数右理想. 显然 $b\in J$,随之 $ab\in J$,即有 $u(ab)=0$,即定义(6)是合理的. 直接验证可知环 A 的模 M 关于(6)确实成为 A 的代数模,此时 M 当然也必是 A 的既约代数模. ▎

定理 7.6.1 设 A 是域 F 上代数,则(一) B 是本原代数理想当且仅当 B 是本原理想;(二) 代数 A 的 J-根和环 A 的 J-根是相同的。

证 (一) B 是 A 的本原代数理想当且仅当 B 是 A 的既约代数模 M 的零化子 $(0:M)$。但由命题 2,M 也是环 A 的既约模,因而 $B=(0:M)$ 是环 A 的本原理想,这是因为,M 作为代数模看待,其零化子和把 M 作为环的模看待其零化子是完全一样的. 同样可证反过来的情况.

(二) 代数 A 的 J-根 $=A$ 的一切本原代数理想之交 $=A$ 的一切本原理想之交 $=$ 环 A 的 J-根. ▎

这样,关于环的 Jacobson 理论便可直接搬到代数上来. 这里想特别指出下面这一点. 设 A 是 F 上本原代数,则 A 是本原环. 依稠密定理,环 A 与除环 D 上左向量空间 M 上的稠密环 A' 是同构的,其中 M 是环 A 的忠实既约模而 D 是 A-模 M 的中心化子. 即 D 反同构于 $\mathrm{End}_A(M)$。依上面命题 2,M 也是 F 上代数 A 的代数模,因而若把 F 中元素看作是加群 M 的自同态对应,则 $F\subseteq \mathrm{End}_A(M)$. 再注意到 F 是交换的,可认定除环 D 包括 F 而是 F 上的代数. 此时 D 上左向量空间 M 上的稠密环 A' 也就是 F 上代数,并与 F 上代数 A 同构. 这一点在进一步讨论本原代数时是很有用的。

最后我们看一下代数的 J-根的特点.

定理 7.6.2 设 A 是 F 上代数,则 A 的 J-根 N 中的元素或是幂零的或是超越的(即不是代数的).

证 设 $b\in N$ 且 b 是代数元,则 $\langle b\rangle=B$ 是有限子代数. 由 $b^kB\supseteq b^{k+1}B$, $k=1,2,\cdots$,知必有正整数 m,使 $b^{m-1}B=b^mB$.因而

有 $b^m \in b^{m-1}B = b^m B$.故有 $c \in B$ 使 $b^m = b^m(-c)$. 但 $B \subseteq N$，故 c 有拟逆元 c'. 这样

$$0 = b^m + b^m c + (b^m + b^m c)c'$$
$$= b^m + b^m(c + c' + cc') = b^m,$$

故 b 是幂零元. ▎

本章的主要结果包含在 Jacobson[1],[2],[3]中. 在学习本章时阅读这些经典文章是非常有益的.

由于 Jacobson 根在结合环理论中的成功，很自然地去探讨对其他类型的环定义相应的 Jacobson 根的可能性. 这类的文章是很多的. 我们这里只想指出：对交错环有很完整的推广. 对 Jordan 环定义了 Jacobson 根，然而相应的半单环的结构定理至今还没有得到. 关于这两类环的 Jacobson 根可参看 Жевлаков 等(1).

重要的稠密定理有进一步的推广，请参看 Amitsur[1].

与完全线性变换环有关的在许永华[2]中作了许多讨论.

习　题

1. 整数环是 J-半单的.

2. 有单位元的单环是本原环.

3. 非零环 R 叫作素环如果 R 的任意两个非零理想的积不为零. 证明有极小右理想的素环是本原环.

4. 若单环 R 是 J-半单的，则 R 有极大右理想.

5. 若单环 R 有极大右理想 J，则 $xR \subseteq J \Longleftrightarrow x \in J$.

6. 证明有极大右理想的单环是 J-半单的.

7. 设 R 是有单位元的环，A 是 R 的右理想，证明下面两个条件等价：

(i) 对每个右理想 B，由 $A+B=R$ 推出 $B=R$.

(ii) R 的 J-根包含 A.

8. 证明：R 是本原环$\Longleftrightarrow$有 R 的极大右理想 M，使$(M:R)=\{r \in R \mid Rr \subseteq M\}=0$.

9. 设 M 是有单位元的环 R 的极大右理想，$s \in R \backslash M$，证明 $(M:s)=\{r \in R \mid sr \in M\}$ 也是 R 的极大右理想，$R/(M:s) \cong R/M$ 是模同构，并且

$(M:R)=\{r\in R \mid Rr\subseteq M\}$等于所有$(M:s)$的交，$s$ 遍历 $R\backslash M$ 的元素.

10. 若 R 是本原环，e 是幂等元，则 eRe 也是本原环.

11. 若 R 是本原环，则 R 的非零理想也是本原环.

12. 一个含有有限秩线性变换的稠密环 R，它的基层恰是由 R 中一切有限秩变换组成.

第八章　无限代数的若干问题

本章中讨论有关无限代数的一些问题．在§1中我们把第三章中关于有限中心单代数的结果推广到无限中心单代数上去．在§§2—3中讨论有多项式恒等式的代数并证明在这一领域中最基本最重要的Kaplansky定理．在§§3—4中对有多项式恒等式的代数解决Курош问题．同时也看到Kaplansky定理的一个应用．在§5中介绍关于Burnside问题和Курош问题的Голод反例．在§6中刻划一类很特殊的无限代数—— Hamilton代数．

§1　无限中心单代数

首先说明一切单环都可以看成中心单代数．

设A是任意环．令End(A^+)表示加群A的自同态环．任取$a\in A$，和以前一样，令

$$\begin{aligned} R_a:\ & A\to A \\ & x\mapsto xa=xR_a, \\ L_a:\ & A\to A \\ & x\mapsto ax=xL_a, \end{aligned}$$

则R_a, L_a都属于End(A^+)．称集$\{R_a, L_a, a\in A\}$在环End(A^+)中生成的子环E为环A的**包络环**．

由于A是结合环，易见E中元素都可写成

$$L_a+R_b+\sum_i L_{c_i}R_{d_i}.$$

A可看是右E-模．易得

命题 1　A是单环$\Longleftrightarrow A$是既约E-模．❙

定义 8.1.1　环A的包络环E在End(A^+)中的中心化子C

叫做环 A 的形心。

易见，若 $\varphi\in C$，则有 $(xy)\varphi=(x\varphi)y=x(y\varphi)$.

设 A 是有单位元 1 的环，则 A 的形心 C 中任意元素 φ，有

$$x\varphi=(x\cdot 1)\varphi=x(1\ \varphi)=xa=xR_a,$$
$$x\varphi=(1\cdot x)\varphi=(1\ \varphi)x=ax=xL_a.$$

这样 $\varphi=R_a$ 而 a 属于 A 的中心 C'，且对应

$$\theta:\ C'\to C$$
$$a\mapsto R_a$$

是 C' 到 C 上的同构对应。利用这个同构对应将它们等同起来，便得

命题 2 有单位元 1 的环 A 的形心与环 A 的中心是一致的。|

命题 3 A 是环。（一）若 $A^2=A$，则 A 的形心 C 是交换的；（二）若 A 没有绝对零因子，则其形心 C 是交换的。

证 对任意 $x,y\in A$，$s,t\in C$，由

$$(xy)(st)=((xy)s)t=(x\cdot ys)t=xt\cdot ys,$$
$$(xy)(ts)=((xy)t)s=(xt\cdot y)s=xt\cdot ys$$

得

$$(xy)(st)=(xy)(ts). \tag{1}$$

（一）若 $A^2=A$，由(1)即得，对任意 $a\in A$ 都有 $a(st)=a\ (ts)$，即 $st=ts$，故 C 是交换的。

（二）对任意 $x,y\in A$，注意到(1)，便有

$$x\cdot y(st-ts)=(xy)(st-ts)=0,$$
$$y(st-ts)\cdot x=(yx)(st-ts)=0,$$

故 $y(st-ts)$ 是 A 的绝对零因子。依假设，它应为零，即 $A(st-ts)=0$，故 $st-ts=0$，即 C 是交换的。|

定理 8.1.1 单环 A 的形心 C 是域。

证 由命题 1 知 A 是 E-既约模。但 C 是 E-既约模 A 的自同态环，依 Schur 引理，知 C 为除环。由命题 3 知 C 还是交换的，故 C 是域。|

这样，任意单环都可看作是域上的代数，例如看作其形心 C 或

C 的子域上的代数．因此单环都是单代数．

另一方面我们还知道，单代数 A 也是单环，这是因为，若 $B\neq 0$ 是环 A 的理想，则 B 所支撑的空间 I 便是代数 A 的代数理想．由代数 A 的单性，就有 $A=I$。I 的元素必具形状 $\sum\alpha_i a_i$，$\alpha_i\in F$，$a_i\in B$，则对任意 $x\in A$，有

$$(\sum\alpha_i a_i)x=\sum a_i(\alpha_i x)\in B,$$

故 $IA\subseteq B$。但 $IA=AA=A$。故 $A=B$。即 A 是单环。

这样单代数和单环就是完全相同的了．

定义 8.1.2 设 A 是域 F 上单代数．若作为环，A 的形心恰是 F，就称 A 为 F 上中心单代数．这也就是说，把单环 A 看作其形心 C 上的代数时，称之为 C 上中心单代数．

中心单代数显然是有限中心单代数的一个推广，即是说，F 上有限中心单代数是现在定义 8.1.2 意义下的 F 上中心单代数。

定义 8.1.3 A 是环，则 $E'=\{\sum L_{x_i}R_{y_i},\ x_i,y_i\in A\}$ 是 A 的包络环 E 的一个子环。称 E' 为 A 的简包络环．

易见，当 A 有单位元时，$E=E'$．

下面定理告诉我们，当 A 是单环时，虽然不一定有 $E=E'$，但 E' 和 E 对 A 有相同的效应．

定理 8.1.2 A 是单环，E' 是 A 的简包络环，则（一）A 是 E'-既约模；（二）E' 在 $\mathrm{End}(A^+)$ 中的中心化子 C' 等于 A 的形心 C．

证 （一）由于对任意 $0\neq a\in A$ 都有 $AaA=A$，故得 A 是 E'-既约模．

（二）设 $\varphi\in C'$，则有 $L_bR_a\cdot\varphi=\varphi\cdot L_bR_a$，$\forall a,b\in A$，即对任意 $x\in A$，有

$$(bxa)\varphi=b(x\varphi)a. \qquad (2)$$

利用(2)就有

$$b[(xa_1)\varphi]a_2=(bxa_1a_2)\varphi=b(x\varphi)a_1a_2,$$

即

$$b\cdot[((xa_1)\varphi)a_2-(x\varphi)a_1a_2]=0. \qquad (3)$$

由 A 是单环，故 A 无绝对零因子，故由(3)得

$$[(xa_1)\varphi]a_2=[(x\varphi)a_1]a_2. \tag{4}$$

对(4)作同样的讨论便得 $(xa_1)\varphi=(x\varphi)a_1, \forall a_1\in A$，即

$$R_a\cdot\varphi=\varphi\cdot R_a, \forall a\in A. \tag{5}$$

类似地可得

$$L_a\cdot\varphi=\varphi\cdot L_a, \forall a\in A. \tag{6}$$

由 (5),(6) 即得 $\varphi\in C$，故 $C'\subseteq C$。另一方面显然 $C\subseteq C'$，故 $C=C'$。 ▎

作为上定理及稠密定理的推论，有

命题 4 设 A 是域 F 上中心单代数，则 A 的简包络环 E' 是域 F 上向量空间 A 上的一个稠密环. ▎

和有限代数情况一样，刻划单代数需要张量积的概念. 与第一章 §3 类似地可定义无限代数间的张量积.

定义 8.1.4 (外张量积) A, B 是域 F 上的代数. A 以 $\{u_i\}$，B 以 $\{v_j\}$ 为 F-基. 规定 $A\otimes B$ 是以形式元素 $u_i\otimes v_j$, $\forall i, j$，为基的 F 上向量空间. 规定其乘法表如下：

$$u_i\otimes v_j\cdot u_k\otimes v_l=u_iu_k\otimes v_jv_l,$$

其中等号右侧应作如下理解：将 A 中元素 u_iu_k 表成 F-基 $\{u_i\}$ 的线性和，将 B 中元素 v_jv_l 表成 F-基 $\{v_j\}$ 的线性和，然后形式地按分配律拆开便成 $A\otimes B$ 的 F-基 $\{u_i\otimes v_j\}$ 的线性和.

定义 8.1.5 (内张量积) D 是 F 上代数而 A, B, C 是其子代数，若

(一) $ab=ba$, $\forall a\in A$, $b\in B$,

(二) $C=AB$,

(三) 若 $\{u_i, i\in I\}, \{v_j, j\in J\}$ 顺序为 A 和 B 的 F-基，则 $\{u_iv_j, i\in I, j\in J\}$ 是 C 的一个 F-基，

则称 C 为代数 A, B 的内张量积.

与有限代数情况类似，可证外张量积 $A\otimes B$ 与 A，B 的 F-基的选择无关. 代数 A, B 的每一内张量积都可看成代数 A, B 的外张量积. 反之，每一外张量积也可以解释成为内张量积(参看本章

习题 1,2,3)．今后它们都将被记作 $A\otimes_F B$,或简记作 $A\otimes B$． 由于A,B不一定有单位元,故$A\otimes B$不一定包含A或B．

定理 8.1.3 A,B是域F上代数,A是中心单代数而B是单代数,则$A\otimes B$是单代数．

证 设I是$A\otimes B$的非零理想．今证必有$I=A\otimes B$．分三种情况来讨论．

（一）I 包含 Ab_0, $0\neq b_0\in B$．任取 $a\in A$, $b\in B$,则有

$$Aa\cdot b_0b=Ab_0\cdot ab\subseteq I\cdot ab\subseteq I.$$

由于 $A^2=A$,故

$$A\cdot b_0b=AA\cdot b_0b\subseteq I. \tag{7}$$

同理

$$A\cdot bb_0\subseteq I. \tag{8}$$

由B的单性,b_0在B中生成的理想就是B,由(7),(8) 便有 $AB\subseteq I$,即 $A\otimes B=AB=I$．

（二）I 含有 ab, $0\neq a\in A$, $0\neq b\in B$．由 $BbB\neq 0$,故有 b_1, $b_2\in B$ 使 $b_1bb_2\neq 0$．任何 $a_1,a_2\in A$,有

$$(a_1aa_2)(b_1bb_2)=(a_1b_1)(ab)(a_2b_2)\in I.$$

但 $AaA=A$,故有 $A(b_1bb_2)\subseteq I$．因而归结到(一)．

（三）一般情况．任取 $0\neq\sum_{i=1}^{m}a_ib_i\in I$．可认定 a_i, $i=1,\cdots,m$,是F-无关的,而 $b_i\neq 0$, $\forall i$．取A的简包络环E'．依命题 4,由于A是F上中心单代数,故E'是F上向量空间A的稠密环．因而对于A中 F-无关元素 $a_1,\cdots,a_m$,必有 $\varphi\in E'$,使

$$a_1\varphi\neq 0,\ a_2\varphi=\cdots=a_m\varphi=0.$$

由E'之定义,知其中元素φ必可写成

$$\varphi=\sum_i L_{a'_i}R_{a''_i},\ a'_i,a''_i\in A.$$

另一方面,由B的单性知有 $b'b_1b''\neq 0$, $b',b''\in B$．考虑I中元素

$$\sum_j(a'_jb')\left(\sum_i a_ib_i\right)(a''_jb'')=\sum_i(a_i\varphi)\cdot(b'b_ib'')$$

$$=a_1\varphi\cdot(b'b_1b'')\neq 0.$$

这样就归结为情形(二). ▎

定理 8.1.4 C是F上代数,A,B是其子代数,A是F上中心单代数而B是单代数且A,B的元素间乘法可换,则或者$AB=0$或者$AB\cong A\otimes B$.

证 借助A,B的F-基$\{u_i\}$,$\{v_j\}$,很容易建立外张量积$A\otimes B$到代数C的子代数AB上的一个同态对应. 但依上面定理,$A\otimes B$是单代数,故得定理的结论. ▎

和过去一样,用A^{-1}表示与A反同构的代数. 下面定理是定理3.1.3的推广.

定理 8.1.5 A是F上中心单代数,则$A\otimes_F A^{-1}$是F上向量空间(即是A)的稠密环.

证 设$C=\mathrm{End}_F(A^+)$是F上向量空间A的一切线性变换作成的F上代数,则A_R(即一切R_a,$a\in A$,的全体构成的环),A_L(即一切L_a,$a\in A$,的全体构成的环)是C的子代数. 由于A是单的,因而没有绝对零因子,故有

$$A\cong A_R,\ A^{-1}\cong A_L.$$

由A的乘法结合律,知A_R,A_L的元素是乘法可换的. 易见$A_RA_L\neq 0$,故由上定理知$A_RA_L\cong A\otimes A^{-1}$.

另一方面,A_RA_L恰是单环A的简包络环E'. 由A是F上中心单代数以及命题4知,A_RA_L是F上向量空间A的稠密环. 这样便得定理. ▎

当A是F上有限中心代数,由上定理便得$A\otimes A^{-1}=F_n$,其中n是F上向量空间A的维数. 这样我们看到F上向量空间的稠密环在无限代数中所处的地位类似全矩阵代数在有限代数中所处的地位.

下面来考察中心可除代数D. 在这些讨论中D的极大子域将起重要作用.

对于任意环(或代数)A. 易见由交换子环组成的升链,其并集仍为交换子环. 故由Zorn引理,环A包含有极大交换子环.

显然A的任一极大交换子环都包含A的中心。当A是可除代数时，A的极大交换子代数必是子域，这是因为若A的交换子代数B含有$b\neq 0$，则$\langle B, b^{-1}\rangle$也是交换子代数。

定理 8.1.6 设D是F上中心可除代数，K是它的一个极大子域，则$K\otimes_F D$是K上向量空间（即是把D看成其子域K上的左空间）的线性变换稠密环。

证 设$C=\mathrm{End}_F(D^+)$。易见D_R, K_L都是C的子代数。

由于$D_R\cong D$，故D_R是F上中心单代数，$K_L\cong K^{-1}\cong K$是F上单代数，且它们的元素是乘法可换的。故由定理8.1.4知$K_L D_R\cong K\otimes D$。

今把D看作是右$K_L D_R$-模。由于把D作为D_R-模看待，它已是既约的，以及$D_R\subseteq K_L D_R$，故D更是$K_L D_R$-既约模，当然也是忠实模。依稠密定理，$K_L D_R$是P上左向量空间D上的稠密环，其中P反同构于$\mathrm{End}_{K_L D_R}(D^+)$。显然

$$K_L\subseteq \mathrm{End}_{K_L D_R}(D^+). \tag{9}$$

任取$\varphi\in\mathrm{End}_{K_L D_R}(D)$，则显然也有$\varphi\in\mathrm{End}_{D_R}(D)$。由于$D$有单位元1，设$1\varphi=d\in D$，则

$$x\varphi=(1\cdot x)\varphi=(1\varphi)x=dx=xL_d,\ \forall x\in D.$$

故$\varphi=L_d$。又由$\varphi=L_d$和每一L_y，$y\in K$，是乘法可换的，即有$L_dL_y=L_yL_d$，则把它们作用于D的单位元1上，便得

$$yd=1\,L_dL_y=1\,L_yL_d=dy,\ \forall y\in K.$$

由K是D中极大子域，得$d\in K$，即$\varphi=L_d\in K_L$。再注意到(9)，便得$\mathrm{End}_{K_L D_R}(D^+)=K_L$。但$K_L\cong K$是交换的，故$P\cong K$。即得$K\otimes D\cong K_L D_R$是$K$上向量空间$D$的稠密环。 ▎

推论 设D是F上有限中心可除代数而K是D的极大子域，则$D\otimes K\cong K_n$。 ▎

下面来考察F上中心可除代数D的维数与其最大子域K在F上的维数之间的关系。先证

预理 1 设D是F上可除代数，A是F上有限代数且有单位元，则$A\otimes D$对右理想有极小条件。

证　这就是要证右 $A\otimes D$-模 $A\otimes D$ 对子模有极小条件．先把 $A\otimes D$ 看作右 D-向量空间，此时由于 $A\otimes D$ 包含 A，故有限代数 A 的 F-基 $a_1,\cdots,a_n$ 也是右 D-向量空间 $A\otimes D$ 的 D-基，因而对 $A\otimes D$ 的 D-子模有极小条件．但 A 有单位元，从而 $A\otimes D$ 也包含 D，故 $A\otimes D$ 的 $A\otimes D$-子模显然也是 D-子模，这样预理得证．▎

定理 8.1.7　设 D 是 F 上中心可除代数，K 是它的一个极大子域，则有

（一）若 $(D:F)=\infty$，则 $(K:F)=\infty$，

（二）若 $(D:F)$ 是有限的，则 $(D:F)=n^2$ 且 $(K:F)=n$．

证　设 $(K:F)=n$，则依上预理，$K\otimes D$ 是 Artin 环．再由定理 8.1.6，$K\otimes D$ 是 K 上向量空间 D 的稠密环．这样 K 上向量空间 D 必是有限维的．

设 $(D:K)=s$，则 $D\otimes K$ 是 K 上全 $s\times s$ 矩阵环，因而 $(D:F)=(D\otimes K:K)=s^2$．而另一方面，$(D:F)=(D:K)(K:F)=sn$，故得 $n=s$．这样就得（一）和（二）．▎

§ 2　*PI*-代数

为了以后讨论方便，首先引入 Φ 上代数（简记为 Φ-代数）的概念，其中 Φ 是有单位元的交换环．如果 A 是一个左 Φ-模且 A 中定义有乘法，满足下列诸条件：

$$1a=a,\ 1\text{ 是 }\Phi\text{ 的单位元},\ \forall a\in A,$$

$$\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b),\ \forall\alpha\in\Phi,\ a,b\in A,$$

则称 A 为 Φ 上代数．易见域 F 上代数是 Φ-代数的一个特殊情况．另一方面，一个环 A 可以很自然地看成整数环 Z 上的代数，因而环也是 Φ-代数的一种特殊情况．这样 Φ-代数既包括域上代数也包括一般的环．

易见对 Φ-代数可类似地定义同态、子代数等概念，而相应的同态定理都是成立的．

在本节中 Φ 指有单位元的交换环而字母 F 则永远表示域．

为了定义有多项式恒等式的Φ-代数，亦即PI-代数，我们需要Φ上自由代数的概念．考察用字母$x_1, x_2, \cdots$作成的一切形式元：

$$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m},\ m,\ i_j \text{ 是任意自然数}. \tag{1}$$

任意取一有单位元的交换环Φ，用这些形式元作基可得Φ上的一个自由模，记作$\Phi[x_1, x_2, \cdots]$．在此自由模中关于基(1)规定如下的乘法表：

$$(x_{i_1}\cdots x_{i_m})\cdot(x_{j_1}\cdots x_{j_l}) = x_{i_1}\cdots x_{i_m}x_{j_1}\cdots x_{j_l}.$$

这样，利用关于基(1)的乘法表可定义$\Phi[x_1, x_2, \cdots]$中的一个关于加法分配的乘法且关于此乘法$\Phi[x_1, x_2, \cdots]$作成一个Φ-结合代数，称之为Φ上不可换不定元$x_1, x_2, \cdots$的自由代数或简称Φ上自由代数，称(1)中元素及带系数者为单项式．$\Phi[x_1, \cdots, x_n]$中元素f常记作$f(x_1, \cdots, x_n)$．

规定单项式(1)的次数为m，即它所含因子x的个数，而非零多项式f的次数规定为其标准式(即表为基元(1)的线性和的唯一表达式）中系数非零的单项式之次数中的最大者．为了方便规定零元的次数是$-\infty$．用$\deg f$表示多项式f的次数，易见

$$\deg(f+h) \leqslant \max(\deg f, \deg h), \tag{2}$$

其中记号max表示取最大者．

一个多项式，若其标准式中每一单项式的次数皆相等，叫作齐次多项式．

规定单项式(1)关于x_i的次数为x_i在其中出现的次数．相应地可定义多项式关于x_i的次数．称多项式$f(x_1, \cdots, x_n)$为多重线性的，如果f关于每一x_i的次数最大是1．

称$f(x_1, \cdots, x_n)$为幺多项式，如果其中次数最高的单项式中有系数为1者．

定义 8.2.1 设A是Φ-代数，说A满足一个m次多项式$f(x_1, \cdots, x_n)$，如果

$$f(a_1, \cdots, a_n) = 0,\ \forall a_i \in A. \tag{3}$$

当Φ-代数A满足一个幺多项式时，称之为具有多项式恒等式的代

数，记作 PI-代数。

(3) 常简记作 $f(A)=0$。

这样对域 F 上代数 A 来说，只要 A 满足一个非零多项式，则它必也满足一个幺多项式，因而是 PI-多项式。

交换代数可看作 PI-代数的第一个例子，因为它满足多项式恒等式 $xy-yx$。

命题 1 设 Φ-代数 A 满足一 d 次幺多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)$，则 Φ-代数 A 必满足一个齐次多重线性幺多项式，其次数 $\leqslant d$。

证 若 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 非多重线性，例如 f 关于 x_1 的次数大于 1，则考虑多项式

$$g(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})=f(x_1+x_{n+1},\cdots,x_n)\\-f(x_1,\cdots,x_n)-f(x_{n+1},\cdots,x_n).$$

此时易见，g 是非零多项式 $\deg g\leqslant d$ 且 g 关于 x_1 的次数较 f 的为小。显然代数 A 是满足多项式 g 的。这样继续作下去，便得 A 满足一个非零的多重线性多项式 $h(x_1,\cdots,x_m)$，其次数 $\leqslant d$。

若 h 中有单项式含（例如说）x_1，也有单项式不含 x_1，则 $h(x_1,\cdots,x_m)=h_1(x_1,\cdots,x_m)+h_2(x_2,\cdots,x_m)$，其中 h_1 中每一单项式都含 x_1 而 h_2 中每个单项式都不含 x_1。由

$$0=h(0,a_2,\cdots,a_m)=h_1(0,a_2,\cdots,a_m)+h_2(a_2,\cdots,a_m)\\=h_2(a_2,\cdots,a_m),\quad \forall a_i\in A,$$

故 $h_2(x_2,\cdots,x_m)$，因而 $h_1(x_1,x_2,\cdots x_m)$ 都是 A 所满足的非零多项式。这样继续作下去便得多重线性多项式 $h(x_1,\cdots,x_m)$ 的每一个齐次部分都是代数 A 的多项式恒等式。注意到 $h(x_1,\cdots,x_m)$ 的最高次项中和 f 一样也有系数为 1 者，故 A 必满足一非零的齐次多重线性多项式

$$p(y_1,\cdots,y_d)=y_1y_2\cdots y_d-\sum_{1\neq\sigma\in S_d}\alpha_\sigma y_{\sigma(1)}\cdots y_{\sigma(d)},\qquad(4)$$

其中 S_d 是 $1,\cdots,d$ 的置换群而 $\alpha_\sigma\in\Phi$。▌

命题 2 若 F 上代数 A 满足一个齐次多重线性恒等式 p，则对 F 的任意扩域 K，$A\otimes K$ 也满足 p。

证　由于 p 具有形状(4)而 A, K 的元素间乘法可换，便有

$$p(a_1b_1,\cdots,a_kb_k)=b_1\cdots b_kp(a_1,\cdots,a_k)=0,\ \forall a_i\in A,\ b_i\in K,$$

由之可进一步得 $p(A\otimes K)=0$. ∎

定义 8.2.2　我们称自由代数 $F[x_1,\cdots,x_n]$中的多项式

$$[x_1,\cdots,x_n]=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}, \tag{5}$$

其中当 σ 是偶(奇)置换时，$(-1)^\sigma$ 是 $1(-1)$，为标准多项式.

说代数 A 满足标准恒等式，若对某个自然数 n, A 满足(5).

当 $n=2$ 时，$[x_1,x_2]=x_1x_2-x_2x_1$，故满足标准恒等式的代数可看作是交换代数的一个自然推广.

与链条件或局部条件相平行的，满足多项式恒等式可看作关于代数的又一类有限条件，因为我们有下面的

定理 8.2.1　若 A 是 F 上 n 维代数，则 A 满足$[x_1,\cdots,x_{n+1}]$，因而有限代数是 PI-代数.

证　设 $u_1,\cdots,u_n$ 是 A 的一个 F-基. 在 A 中任取 $n+1$ 个元素 $a_1,\cdots,a_{n+1}$，并将它们表成 u_i 的线性和. 由于 $[x_1,\cdots,x_{n+1}]$是多重线性的，故$[a_1,\cdots,a_{n+1}]$ 是形如$[u_{i_1},\cdots,u_{i_{n+1}}]$ 的线性和，其中每一 u_{i_j} 都取自$\{u_1,\cdots,u_n\}$. 这样 $u_{i_1},\cdots,u_{i_{n+1}}$ 中至少有两个是相同的，而由标准多项式的定义立刻得$[u_{i_1},\cdots,u_{i_{n+1}}]$都是零. 故$[a_1,\cdots,a_n]=0$, $\forall a_i\in A$. ∎

作为这个定理的推论，我们有

定理 8.2.2　域 F 上全矩阵代数 F_n 满足$[x_1,\cdots,x_{n^2+1}]$. ∎

Amitsur 和 Levitzki 曾证明，F_n 实际上满足$[x_1,\cdots,x_{2n}]$. 与此联系的是下面这个有用的结果.

定理 8.2.3　域 F 上全矩阵代数 F_n 不能有次数低于 $2n$ 的多项式恒等式.

证　设 F_n 满足一个次数小于 $2n$ 的多项式. 则由命题 1，它将满足一个齐次多重线性多项式 f，其次数也小于 $2n$，可将 f 写作

$$f=ax_1x_2\cdots x_d+\sum_{1\neq\sigma\in S_d}a_\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(d)},$$

其中α, $\alpha_\sigma \in F$ 而$\alpha \neq 0$。取 F_n 中如下的矩阵单位：$e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23}, \cdots, e_{n-1,n}, e_{n,n}$, 其个数为 $2n > d$。将其中前 d 个代入 f，便得

$$f(e_{11}, e_{12}, e_{22}, \cdots) = \alpha e_{11} e_{12} e_{22} e_{23} \cdots \neq 0.$$

这是矛盾，故得定理。 |

Φ-代数A的一个元素 a 叫做(Φ 上)代数元，如果它满足一个幺多项式 $f(x) \in \Phi[x]$，即 $f(a) = 0$。元素 a 所满足幺多项式的最小次数也叫作代数元 a 的次数。代数的 Φ-代数是指每一元都是代数元的代数。有界次代数的 Φ-代数是指其每一代数元的次数$\leqslant$某一固定自然数。

推广定理 8.2.1，我们有

定理 8.2.4 设A是Φ上有界次代数的代数，则A是 PI-代数。

证 A中元素b满足一个n次多项式 $x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x$，其中 $\alpha_i = \alpha_i(b) \in \Phi$ 而 n 是固定的。用 $[u, v]$ 表示 $uv - vu$，对任意 $a \in A$，有

$$\begin{aligned} 0 = [0, a] &= [b^n + \alpha_{n-1}b^{n-1} + \cdots + \alpha_1 b, a] \\ &= [b^n, a] + \alpha_{n-1}[b^{n-1}, a] + \cdots + \alpha_1[b, a], \end{aligned} \tag{6}$$

再用元素 $[b, a]$ 去和上式进行类似计算，注意到 $[u, u] = 0$，便有

$$[[b^n, a], [b, a]] + \alpha_{n-1}[[b^{n-1}, a], [b, a]] + \cdots + \alpha_2[[b^2, a], [b, a]] = 0.$$

再用$[[b^2, a], [b, a]]$去和上式进行类似计算，这样继续下去，所有的系数 α_i 都不见了而得到 A 所满足的一个二元多项式。不难证明它是一个非零多项式。|

本原环在环的结构理论中占有重要地位。我们讨论过本原 Artin 环以及有极小单侧理想的本原环。下面我们来考察一个本原环同时又是 PI-代数。完全刻划这类本原环的 Kaplansky定理是研究 PI-代数方面的一个占中心地位的定理。

定理 8.2.5 (Kaplansky) 设A是域F上的本原代数且是F上 PI-代数，它满足一个次数为 d 的多项式，则A必是其中心 C

上的有限单代数，且其维数 $n\leqslant\left(\frac{d}{2}\right)^2$.

证　注意到第七章§6中的说明，F上本原代数A可看作D上左向量空间M上的稠密环，其中D是F上可除代数. 由定理7.3.3，知代数A或对某一自然数m同构于D_m或对任意自然数m，A包含有子代数$B_{(m)}$，它的同态象是D_m. 但A的子代数及其同态象也满足A所满足的多项式恒等式. 这样依定理8.2.3，上面的第二种可能性是不可能的. 因而A同构于D_m. 此时A有单位元，A的中心也就是D的中心，因而是域F的扩域，用C记之.

设K是D的一个极大子域. 依定理8.1.6，$D\otimes_C K$是K上一个向量空间的稠密环，它当然可看作K上的代数. 由于A满足次数为d的多项式，依命题1，A，因而D必满足次数$\leqslant d$的齐次多重线性多项式f. 再由命题2，$D\otimes_C K$也满足f. 重复上段的讨论，便得$D\otimes_C K\cong K_{m'}$. 这样得$(D:C)=(D\otimes_C K:K)$是有限的. 故$A\cong D_m$是C上有限中心代数. 设$(A:C)=n_1^2$，这是因为有限中心单代数的维数必是平方数. 取域C的一个适当的扩域P，依定理8.1.6的推论或定理3.2.2，有$A\otimes_C P\cong P_{n_1}$. 依命题2，$A\otimes_C P$，因而$P_{n_1}$也满足$f$. 再由定理8.2.3，知$2n_1\leqslant d$. ▎

§3　Курош问题

在第五章中我们曾介绍过Курош问题：代数的代数A是局部有限的吗？在本节中将证明，若A还是PI-代数，则A确是局部有限的.

首先，对代数A引进局部有限根的概念. 在前面我们曾证明过下面事实：局部有限代数借助于局部有限代数所得到的扩张是局部有限的(定理5.1.1). 由之便得

命题1　若B和C是代数A的局部有限理想，则$B+C$也是. ▎

命题2　代数A中含有最大的局部有限理想$L(A)$. $L(A)$还具有下面性质：

(一) $L(A)$包含A的一切局部有限单侧理想，

(二) $A/L(A)$没有非零的局部有限理想.

证 由于局部有限代数升链之并仍是局部有限代数，故由Zorn引理，A中有极大的局部有限理想$L(A)$，依命题1，它包含A的一切局部有限理想，故它是唯一极大的局部有限理想. 注意到上述的定理5.1.1，知$A/L(A)$不再有非零的局部有限理想，这就证明了(二).

为了证明(一)，我们在商代数$A/L(A)$中去考虑. 这也就是假定代数A的$L(A)=0$而去证A的局部有限单侧理想C也等于零. 为确定起见，设C是左理想.

CA是A的理想. 今证它是局部有限的. 在CA中任取$x_1,\cdots,x_m$，则每一x_i可写成

$$x_i=\sum_j c_{ij}a_{ij},\ c_{ij}\in C,\ a_{ij}\in A. \tag{1}$$

令$y_{ijmq}=a_{ij}c_{mq}$. 它们是C中元素. 由C的局部有限性，知有限多元素c_{st}, y_{ijmq}生成一个有限代数B. 由(1)得

$$\begin{aligned}x_ix_k&=\sum_j c_{ij}a_{ij}\sum_m c_{km}a_{km}=\sum_{j,m}c_{ij}a_{ij}c_{km}a_{km}\\&=\sum_{j,m}c_{ij}y_{ijkm}a_{km}\subseteq\sum_m Ba_{km}.\end{aligned}$$

这样$x_1,\cdots,x_m$中任意两个的乘积必在$T=\sum\limits_{k,m}Ba_{km}$中. 显然$x_1,\cdots,x_m$也在$T$中. 由$B$的有限性还知$T$是$F$上有限空间. 又

$$\begin{aligned}Ba_{km}x_i&=Ba_{km}\sum_j c_{ij}a_{ij}=\sum_j Ba_{km}c_{ij}a_{ij}\\&\subseteq\sum_j By_{kmij}a_{ij}\subseteq\sum_j Ba_{ij}\subseteq T.\end{aligned}$$

故$x_1,\cdots,x_m$生成的子代数必在有限空间T中，即得理想CA是局部有限的. 由假设$L(A)=0$. 故$CA=0$，即C是A的理想，因而C是局部有限理想. 再用假设$L(A)=0$，得$C=0$. ▎

与有限代数的幂零根、代数的局部幂零根或环的Jacobson根相比较，上命题说明$L(A)$与这些根有完全类似的性质. 因而很

自然地称 $L(A)$ 为代数 A 的**局部有限根**.

我们还需要下面几个预理.

预理 1 若代数 A 无非零的幂零元素,则

(一) A 的幂等元必属于 A 的中心,

(二) 对 A 的任意非零代数元 a, 必有幂等元 $e\in\langle a\rangle$, 有性质 $ea=ae=a$.

证 (一) 设 e 是 A 的幂等元. 对任意 $x\in A$, 由

$$(xe-exe)^2=(ex-exe)^2=0,$$

及 A 中无非零幂零元,故 $xe=exe=ex$, 即 e 在 A 的中心内.

(二) 此时易见 $\langle a\rangle$ 是有限半单代数, 因而有单位元 e. 下面给一个更直接的证明. 设非零代数元 a 的最小多项式为 $f(x)$ 则

$$f(a)=a^n+\alpha_1a^{n-1}+\cdots+\alpha_ka^{n-k}=0,\ \alpha_k\neq0,\ k\geqslant1.$$

若 $k=n$, 则 A 有单位元 1 且 $1\in\langle a\rangle$, 此时显然有 $1\cdot a=a\cdot 1=a$. 若 $k\neq n$,则易见

$$\begin{aligned}(a^{k+1}+\alpha_1a^k+\cdots+\alpha_ka)^{n-k}&=((a^k+\alpha_1a^{k-1}+\cdots+\alpha_k)a)^{n-k}\\&=(a^k+\alpha_1a^{k-1}+\cdots+\alpha_k)^{n-k}a^{n-k}=0.\end{aligned}$$

在上式中,和以前一样,我们将 $(a^2+\alpha a)$, $\alpha\in F$,记作 $(a+\alpha)a$, 虽然 $a+\alpha$ 在 A 中不一定有意义. 其次, 由于 A 无非零幂零元, 故

$$a^{k+1}+\cdots+\alpha_{k-1}a^2+\alpha_ka=0,$$

由之便得 $a=a^2p(a)$,其中 F 上多项式 $p(x)$ 可能带常数项. 设 $e=ap(a)\in\langle a\rangle$, 则

$$e^2=ap(a)ap(a)=a^2p(a)p(a)=ap(a)=e,$$

还有 $a=ae=ea$, 由 $a\neq0$, 知 e 是非零的. ▎

预理 2 若代数的代数 A 无非零的幂零元素, P 是 A 的子代数,则对 P 中任意有限个非零元素 $a_1,\cdots,a_m$, 必有幂等元 $e\in P$, 使 $a_ie=ea_i=a_i$, $\forall i$.

证 对 a_i 的个数 m 作归纳法. 当 $m=1$ 时这就是预理 1 中的(二). 设有幂等元 $e_1\in P$, 使 $a_1e_1=a_1,\cdots,a_{m-1}e_1=a_{m-1}$. 若是 $a_me_1=a_m$, 注意到 e_1 必在 A 的中心内, 则 e_1 即为所求者. 否则, 依

预理 1，有幂等元 $e_2\in P$，有 $(a_m-a_me_1)e_2=(a_m-a_me_1)$，由之有

$$a_m=a_m(e_1+e_2-e_1e_2).$$

设 $e=e_1+e_2-e_1e_2\in P$。由 $a_m\neq 0$ 知 $e\neq 0$。依预理 1，e_1, e_2 属于 A 的中心，直接计算知 $e^2=e$ 且对 $i<m$，注意到 $a_ie_1=a_i$，有

$$a_ie=a_i(e_1+e_2-e_1e_2)=a_i,$$

这样 e 即所求者．▎

预理 3 设 A 是 F 上代数，有单位元．C 在 A 的中心内，C 是 F 的代数扩域，且 $(A:C)$ 是有限的，则 A 是局部有限的．

证 易见，代数的代数又是交换的话，它必是局部有限的，故 F 上代数 C 是局部有限的．

设 $y_1\cdots, y_m$ 是 A 的一个 C-基．因而

$$y_iy_j=\sum_k c_{ijk}y_k,\ c_{ijk}\in C.$$

任取 A 的有限子集 $\{x_1,\cdots,x_n\}$，则

$$x_l=\sum_i c_{li}y_i,\ c_{li}\in C.$$

C 的有限子集 $\{c_{ijk}, c_{li}, \forall i, j, k, l\}$ 生成一个有限代数 C_0。此时一切形如 $\sum c_iy_i$, $c_i\in C_0$，的元素组成有限子代数 B．易见 $x_i\in B, \forall i$．故 $\{x_1,\cdots,x_m\}$ 生成的子代数必也是有限维的．▎

现在我们能够解决关于 PI-代数的 Курош 问题了．

定理 8.3.1 若 A 是 F 上代数的代数且是 PI-代数，则 A 是局部有限的．

证 由于代数的 PI-代数的子代数仍是代数的 PI-代数，因而不妨设 A 是有限生成的而去证它是有限代数，即需证 $A=L(A)$。若 $A\neq L(A)$，则去考察 $A/L(A)\neq 0$，作为 A 的商代数，它显然也是有限生成的、代数的 PI-代数．这样就得到一个非零的代数，不妨仍记作 A，它是有限生成的、代数的 PI-代数且 $L(A)=0$。我们来证明这是不可能的．下面分两种情形来讨论．

（一） A 不含非零的幂零元．依定理 7.6.2，注意到 A 的元素都是代数的，知 A 是 J-半单代数，因而 A 有本原理想。

取代数 A 的一个本原理想 P. 由 $\bar{A}=A/P$ 是本原代数且是 PI-代数，由 Kaplansky 定理，$\bar{A}$ 是其中心 $\bar{C}$ 上的有限代数，依预理 3，$\bar{A}$ 是局部有限的。但 A，因而 $\bar{A}$，是有限生成的，故 $\bar{A}$ 是 F 上一个有限代数。

令 $\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_m$ 是 $\bar{A}=A/P$ 的 F-基，$y_i\in A$，而 $x_1, \cdots, x_n$ 是 A 的生成元组，此时有

$$x_i=\sum_j \alpha_{ij}y_j+u_i,\ \alpha_{ij}\in F, u_i\in P, \tag{2}$$

$$y_iy_j=\sum_k \beta_{ijk}y_k+u_{ij},\ \beta_{ijk}\in F, u_{ij}\in P. \tag{3}$$

令 P_0 是由所有 u_i, u_{ij} 生成的理想. 显然 $P_0\subseteq P$. 由于 $x_1, \cdots, x_n$ 生成 A，依(2)，(3) 知 A 中任意元素都能表成 $\sum\alpha_i y_i+t, \alpha_i\in F$，$t\in P_0$。这样任取 $a\in P$，则有

$$a=\sum\alpha_iy_i+t,\ a-t=\sum\alpha_iy_i\in P.$$

故在 $\bar{A}$ 中就有 $\sum\alpha_i\bar{y}_i=0$。但 $\bar{y}_i$ 组成 $\bar{A}$ 的 F-基，因而 $\alpha_i=0$，即 $a=t\in P_0$. 这就证得 $P_0=P$.

这样，P 是由有限多个元素 u_i, u_{ij} 生成的。依预理 2，有一幂等元 $e\in P$ 且 e 在 A 的中心内，有 $u_ie=u_i$, $u_{ij}e=u_{ij}$. 因而对任意 $a\in P$，有 $ae=a$。故 $P=Ae$. 注意到 P 是 A 的本原理想，此时必有 $e\neq 1$. 作关于 e 的 Peirce 分解：$A=Ae\oplus A(1-e)=P\oplus A(1-e)$. 这样，理想 $A(1-e)\cong A/P$ 是有限维的，因而 $A(1-e)\subseteq L(A)$. 即 $L(A)\neq 0$.

（二） A 含有非零的幂零元. 依前节命题 1，PI-代数 A 满足一个齐次多重线性多项式 f. 我们对 f 的次数 d 作归纳法. 当 $d=2$ 时，f 或是 x_1x_2，此时 $A^2=0$，或是 $x_1x_2+\alpha x_2x_1$，$0\neq\alpha\in F$，此时 A 中任意两元素 a, b, 有 $ab=-\alpha ba$，即 A “基本上”是交换的. 故无论哪种情形，A 总是局部有限的.

假设对任意满足 d-1 次多项式的代数的代数都是局部有限的而设 A 满足一个 d 次多项式 f. 不妨设 f 是 d 次多重线性齐次多项式，而将 f 写成：

$$f(x_1, \cdots, x_d) = x_1 q(x_2, \cdots x_d) + h(x_1, \cdots x_d),$$

其中 $h(x_1, \cdots, x_d)$中不含以 x_1 为第一个因子的单项式，而 $q(x_2, \cdots x_d)$是非零多项式.

由于A含有非零幂零元，故有 $a \in A, a \neq 0$ 而$a^2=0$. 设T是由a生成的左理想，显然 $Ta=0$. 令 $x_1=a, x_2=t_2, \cdots, x_d=t_d, t_i \in T$, 代入 f 中便有 $aq(t_2, \cdots, t_d)=0$. 令 $W=\{x \in T | ax=0\}$. 由 $TW=0$ 知 W 是T的一个理想. 易见 T/W满足 $d-1$ 次多项式 $q(x_2, \cdots, x_d)$. 依归纳法假设，T/W 是局部有限的. 由 $W^2=0$ 知W 也是局部有限的，因而T是局部有限的，即T是A的局部有限左理想. 由命题 2 知 $0 \neq T \subseteq L(A)$，故 $L(A) \neq 0$.

故无论哪一种情形，我们都有 $L(A) \neq 0$. 这是和 $L(A)=0$ 的假设矛盾的. 定理得证. ▎

作为上定理与定理 8.2.4 的直接推论，我们有

定理 8.3.2 若A是F上有界次代数的代数，则A是局部有限的. ▎

定理 8.3.3 (Levitzki) 若A是F上幂零元代数且是PI-代数，则A是局部幂零的. ▎

定理 8.3.4 若A是F上幂零元代数且所有元素的幂零指数有界(即存在一自然数 n，使得 $a^n=0$, $\forall a \in A$)，则A是局部幂零的. ▎

在上面的定理中如果对域F的特征数加以适当限制，可以得到更强的结果，这就是下面的 Nagata-Higman 定理，它是 nil-nilpotence 问题（即讨论由每个元素的幂零性推出整个代数的幂零性的问题）中非常漂亮的一个结果. 下面叙述的证明是 P. J. Higgins 给出的.

定理 8.3.5 (Nagata-Higman) A是域F上结合代数. 若A的每一元都是幂零元，且它们的幂零指数有界而不大于自然数n，若F的特征为零或 $p>n$，则必有 $A^N=0$，其中$N=2^n-1$.

证 我们对 n 作归纳法，而假定：对任意F上代数 B，如果 $b^{n-1}=0$, $\forall b \in B$，则 $B^m=0$，其中 $m=2^{n-1}-1$，因为当 $n=1$ 时

定理显然成立.

先引入一个符号 1，1 不是 A 中的元素，但约定有下列等式：

$$a^0=1,\ 1\cdot b=b,\ (a+1)b=ab+b,\ \forall a,b\in A.$$

这完全是为了在下面计算时书写简便. 再令

$$\begin{Bmatrix} a, & b \\ n-1, & 1 \end{Bmatrix}=\sum_{i=0}^{n-1} a^i b a^{n-i-1}.$$

依上规定，当 $i=0$ 或 $n-1$ 时上式右侧的相应项是有意义的且是 A 中元素. 此时

$$\begin{Bmatrix} a, & 1 \\ n-1, & 1 \end{Bmatrix}=na^{n-1}.$$

依定理假设,对任意 $\alpha\in F$,$(a+\alpha b)^n=0,\forall a,b\in A$. 利用上面引入的符号,这就是

$$(a+\alpha b)^n=a^n+\alpha\begin{Bmatrix} a, & b \\ n-1, & 1 \end{Bmatrix}+\cdots+\alpha^n b^n=0. \tag{4}$$

注意到关于 F 的假设,知 F 中有多于 n 个不同的元素. 令 (4) 中 α 取 F 中 $n+1$ 个不同的值，联合起来便得一齐次方程组，利用范得蒙行列式解之得(4)中每一项中属于 A 的因子必都是零,特别

$$\begin{Bmatrix} a, & b \\ n-1, & 1 \end{Bmatrix}=0,\ \forall a,\ b\in A. \tag{5}$$

考察

$$f(a,b,c)=\sum_{i,j=0}^{n-1} a^i c b^j a^{n-i-1} b^{n-j-1}.$$

一方面，

$$f(a,b,c)=\sum_{j=0}^{n-1}\begin{Bmatrix} a, & cb^j \\ n-1, & 1 \end{Bmatrix} b^{n-j-1}=0;$$

另一方面，

$$f(a,b,c)=\sum_{i=0}^{n-1} a^i c\begin{Bmatrix} b, & a^{n-i-1} \\ n-1, & 1 \end{Bmatrix}=a^{n-1}c(nb^{n-1})=na^{n-1}cb^{n-1}.$$

注意到关于F的特征之假设，故有

$$a^{n-1}cb^{n-1}=0,\ \forall a,b,c\in A. \tag{6}$$

令R是由所有a^{n-1}，$a\in A$，生成的理想，则由(6)有

$$RAR=0. \tag{7}$$

在商代数$\bar{A}=A/R$中有$b^{n-1}=0$，$\forall b\in\bar{A}$，故利用归纳法假设有$\bar{A}^m=0$，其中$m=2^{n-1}-1$。这样$A^m\subseteq R$。再利用(7)得

$$A^{2m+1}\subseteq RAR=0,$$

其中$2m+1=2^n-1$。 ▎

§ 4 Курош 问题（续）

在上一节中我们介绍了 Levitzki 和 Kaplansky 对 PI-代数解决 Курош 问题的证明方法。它是建立在环的结构理论上的。本节中我们介绍证明此结果的Ширшов 的证明方法(见 Ширшов (1),(2)以及 Jacobson(5))。他针对问题的特点直接使用组合方法来讨论而得到较一般的结果。其证明思路是这样的：设A是有限生成的代数，设$\{a_1,\cdots,a_k\}$是它的一组生成元，此时A中任意元素可表成一些次数为任意的单项式

$$a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_l},\ a_{i_t}\in\{a_1,\cdots,a_k\},\ t=1,\cdots,l, \tag{1}$$

的线性和。因而欲证A作为Φ-模（其中Φ是有单位元的交换环）是有限生成的，只要证明存在一个自然数N，使得当$l\geqslant N$时任意单项式(1)都可表成次数较小的单项式的线性和即可。

设R是有限集，其元素记作$x_1,\cdots,x_k$。规定当$i>j$时$x_i>x_j$，这样R成为一个有序集。

考察Φ上自由结合代数$\Phi[x_1,\cdots,x_k]$，并简称不带系数的单项式

$$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_l},\ x_{i_t}\in\{x_1,\cdots,x_k\},\ t=1,\cdots,l,$$

为字或更详细些，由R中元素组成的字记作R-字而其次数l为该字的长或更详细些R-长。如果字α是字β的一部分，即若

$$\beta=x_{i_1}\cdots x_{i_t}\alpha x_{i_s}\cdots x_{i_q},$$

其中 $x_{i_p}, x_{i_q} \in R=\{x_1, \cdots, x_k\}$ 而 $t\geqslant 0, s\geqslant 0$，则称 α 为 β 的子字.

我们把这些字的全体记作 W. W 关于自由代数 $\Phi[x_1, \cdots, x_k]$ 中的乘法作成一个半群.

定义 8.4.1 称形如

$$x_k x_k \cdots x_k x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_s},$$

其中 x_k 至少出现一次而 $s\geqslant 1$, $i_t \neq k, t=1, \cdots, s$，的字是 x_k-型字. 如果一个字 α 可表成 x_k-型字的乘积形式，则称此分解式为字 α 的 x_k-分解式.

易见，任意字 α 最多只有一种可能写成 x_k-分解式，并且字 α 有 x_k-分解式当且仅当 α 以元素 x_k 开头而以 $x_i, i\neq k$，结尾.

在 W 中如下引入偏序：如果字 α, β 有相同的长，则按字典排列(注意我们已规定了 R 的序)排列之.

在所有 x_k-型字的集 T 中如下引入序：设 α, β 是 T 中任意两个字（即不一定有相同的长）. 如果按字典排列 α 大于 β 或者 α 是字 β 的开始部分(即 $\beta=\alpha x_{i_1}\cdots x_{i_t}, t\geqslant 1$)，则规定 $\alpha>\beta$.

定义 8.4.2 称字 α 是 n-可裂的，其中 n 是自然数，如果 $\alpha=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$，每一子字 α_i 的长 $\geqslant 1$，且对 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$，只要它不等于 $(1, 2, \cdots, n)$，就有

$$\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_n}<\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

例如，字 $x_3x_1x_2x_2x_1x_1x_2x_1x_1x_1$ 是 3-可裂字且有几种 3-可裂的分解式，如

$$(x_3x_1)(x_2x_2x_1x_1)(x_2x_1x_1x_1);$$

$$(x_3x_1x_2)(x_2x_1x_1)(x_2x_1x_1x_1);$$

$$(x_3)(x_1x_2x_2x_1x_1x_2)(x_1x_1x_1).$$

直接检验可知此字不是 2-可裂字.

具有 x_k-分解式的字 α 可唯一地表成 $t_1t_2\cdots t_s$，其中 $t_i\in T$，因而可看作是由 T 中元素组成的字. 此时为了和把 α 看成 R-字相区别，称之为 T-字. 相应地，术语 R-长，T-长的意义是清楚的. 例如当 $k=4$ 时，取

$$\alpha = x_4 x_4 x_1 x_4 x_3 x_1 x_4 x_4 x_4 x_2 x_2 x_3 x_1 x_2.$$

α 之 R-长是 14，α 是 T-字，其 T-长是 3。

对全体 T-字组成的集合 W_T 也引入偏序$\prec$：如果 α，β 是两个 T-字且有相同的 T-长，则当 α 按字典排列小于 β 时（注意上面对 T 已规定序了）规定 $\alpha \prec \beta$.

与上面定义 2 一样，对 T-字也有 n-可裂的概念. 在容易引起混淆的地方，我们把 R-字 α 和 T-字 α 的 n-可裂分别记作 α 的 n_R-可裂和 n_T-可裂。

注意到 T 中序的规定（特别，如果 α 是 β 的开始部分且 $\alpha \neq \beta$，则 $\alpha > \beta$）以及 x_k-型字都是以 x_k 开始的，易知 T 中任意两个字 α, β，如果作为 T-字有 $\alpha \succ \beta$，则作为 R-字也必有 $\alpha > \beta$. 利用这一点我们来证明下面的

命题 1 T-字 α 的 n_T-可裂分解式也是 R-字 α 的 n_R-可裂分解式.

证 设 $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 是 T-字 α 的 n_T-可裂分解式，因而依定义作为 T-字有

$$\alpha \succ \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_n},$$

其中排列 $(i_1, \cdots, i_n) \neq (1, \cdots, n)$. 由上面刚说过的，作为 R-字也必有

$$\alpha > \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_n},$$

即 α 的这个 n_T-可裂分解式 $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ 也是 α 的 n_R-可裂分解式. ❙

命题 2 若 T-字 α 是 $(n-1)_T$-可裂字，则 R-字 αx_k 是 n_R-可裂字.

证 取 T-字 α 的一个 $(n-1)_T$-可裂分解式

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} = (x_k x_{i_1} \cdots x_{j_1})(x_k x_{i_2} \cdots x_{j_2}) \cdots (x_k x_{i_{n-1}} \cdots x_{j_{n-1}}), \tag{2}$$

其中 $x_{i_t}, x_{j_t} \in R$ 且 $x_{j_t} \neq x_k$, $t = 1, \cdots, n-1$. 由上面命题 1 知(2)也是 $(n-1)_R$-可裂式. 今证 αx_k 的下面分解式

$$\alpha x_k = (x_k)(x_{i_1} \cdots x_{j_1} x_k)(x_{i_2} \cdots x_{j_2} x_k) \cdots$$

$$(x_{i_{n-1}}\cdots x_{j_{n-1}}x_k) \tag{3}$$

是 n_R-分裂分解式．这是因为，保持第一个位置上(x_k)不动的那些置换把 αx_k 变成 $\alpha' x_k$，这里 α'是由 α 的$(n-1)_R$-分裂式(2)经过某一置换得到的，因而有 $\alpha>\alpha'$，随之有 $\alpha x_k>\alpha' x_k$．其次，若 αx_k 的 n_R-分裂式(3)经过一个使(x_k)离开第一个位置的置换，则所得到的字其开始处 x_k 的个数必较 αx_k 的开始处之 x_k 的个数为少（为此只要注意到(2)中每一括号内 x_k 的个数必大于或等于其后面括号中的 x_k 的个数），因而它比 αx_k 为小．命题证完．▍

命题 3（Ширшов） 对于任意三个自然数 k,s,n 必存在一个自然数 $N=N(k,s,n)$，它依赖于 k,s,n，使得在由 k 个有序符号组成的长为 $N(k,s,n)$ 的任意结合字中或者出现 s 个相邻的相同子字（即含有形如 β^s 的子字，β 之长$\geqslant 1$）或者含有一个 n-可裂子字．

证 和前面一样，设k个有序符号之集为$R=\{x_1,\cdots,x_k\}$．我们对 n 作归纳法来证明 $N(k,s,n)$ 的存在性．易见对任意 k,s，$N(k,s,1)$是存在的，并作归纳假定：对任意k,s，$N(k,s,n-1)$是存在的。另一方面，易见 $N(1,s,n)$是存在的，为此只要取 $N(1,s,n)=s$ 便可．这样我们在下面的证明中又可对 k 作归纳法，即作又一个归纳假设：对任意 s,n，$N(k-1,s,n)$ 是存在的。现在在这双重归纳假设下来证明 $N(k,s,n)$的存在性．

考察任意一个长为

$$[s+N(k-1,s,n)][N(k^{N(k-1,s,n)+s},s,n-1)+1]$$

的字 α．α 可分解成下面形式

$$\alpha=\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

其中子字 α_1（可以不出现）只含符号 $x_1,\cdots,x_{k-1}$，子字 α_3（也可以不出现）只含符号 x_k，而子字 α_2 是一个 x_k-分解字．若

$$\alpha_1 \text{ 之长} \geqslant N(k-1,s,n),$$

则依归纳法假设，α_1，因而 α 或含有 s 个相邻的相同子字，或含有一个 n-可裂字．若

$$\alpha_3 \text{ 之长} \geqslant s,$$

则 α_3，因而 α，含有 s 个相邻的子字 x_k. 这样，我们可以认定

$$\alpha_2 \text{之长} = \alpha \text{之长} - \alpha_1 \text{之长} - \alpha_3 \text{之长}$$
$$\geqslant [s + N(k-1,s,n)] \cdot N(k^{N(k-1,s,n)+s}, s, n-1). \qquad (4)$$

把 x_k-分解字 α_2 写成

$$\alpha_2 = \alpha_{21}\alpha_{22}\cdots\alpha_{2m},$$

其中每一子字 α_{2i} 都是 x_k-型字. 重复上面的讨论，可认定

$$\alpha_{2i} \text{之长} < s + N(k-1,s,n). \qquad (5)$$

易见满足(5)的 x_k-型字的个数小于 $k^{N(k-1,s,n)+s}$.

现在我们把 α_2 看成 T-字（和前面一样，这里的 T 是一切 x_k-型字之集）. 由(4)知

$$\alpha_2 \text{的} T\text{-长} > N(k^{N(k-1,s,n)+s}, s, n-1). \qquad (6)$$

这样，根据归纳法假设 T-字 α_2 或有 s 个相邻的 T-子字，或者含有 $(n-1)_T$-可裂字 β.

若是出现第一种可能性，则这 s 个相邻相同的 T-子字当然也是 R-字 α 的 s 个相邻相同的 R-子字，这样问题就解决了. 若是出现第二种可能性，则由 (6) 可知子字 β 之后必还至少出现一个 x_k，这样 $\beta\, x_k$ 是 α 的子字. 依命题 2，$\beta\, x_k$ 是 n_R-可裂字，这样 α 也满足命题的要求. 这样，只要取

$$N(k,s,n) = [N(k-1,s,n)+s] \cdot [N(k^{N(k-1,s,n)+s}, s, n-1)+1]$$

即可. ▎

命题 4 设 α 是长为 m 的字，则或者 $\alpha = \beta^t, t > 1$，或者对于任意自然数 $n \leqslant m$，字 α^{2^n} 含有 n-可裂子字.

证 设 $\alpha = z_1 z_2 \cdots z_m$，其中 $z_i \in \{x_1, \cdots, x_k\}$. 用 σ 表示置换$(12\cdots m)$，且若 θ 是任意一个置换，则令

$$\alpha\theta = z_{\theta(1)} \cdots z_{\theta(m)}.$$

此时有

$$\alpha_{i+1} = \alpha\sigma^i = z_{i+1} z_{i+2} \cdots z_m z_1 z_2 \cdots z_i, \quad i < m, \qquad (7)$$

上面第一个等号是我们对符号 α_{i+1} 的定义. 由(7)我们看到，若令 $v_i = z_1 z_2 \cdots z_{i-1}$，$u_i = z_i z_{i+1} \cdots z_m$，则有

$$\alpha = v_i u_i, \quad \alpha_i = u_i v_i. \tag{8}$$

令 G 是由 σ 生成的循环群而

$$H = \{\theta | \theta \in G, \ \alpha\theta = \alpha\}.$$

易见 H 是循环群，设其生成元为 σ^d，其中 $1 \leqslant d \leqslant m$. 此时显然有 $m = dt$，t 是自然数且

$$\alpha = z_1 z_2 \cdots z_m = z_{d+1} \cdots z_{d+m} \text{（足标按模 } m \text{ 计算）}.$$

如果 $d \neq m$，则 $t > 1$ 且 $\alpha = \beta^t$，其中 $\beta = z_1 \cdots z_d$；如果 $d = m$，则 $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为互不相同的字.

若出现第二种情形，把这 m 个不相同的字按字典排列如下

$$\alpha_{i_1} > \alpha_{i_2} > \cdots > \alpha_{i_m}. \tag{9}$$

现在任取自然数 $n \leqslant m$，我们来考察 α^{2n}，将它写成下面形式

$$\begin{aligned}\alpha^{2n} &= (\alpha\alpha)(\alpha\alpha)\cdots(\alpha\alpha)\\ &= (v_{i_1} u_{i_1} v_{i_1} u_{i_1})(v_{i_2} u_{i_2} v_{i_2} u_{i_2})\cdots(v_{i_n} u_{i_n} v_{i_n} u_{i_n}),\end{aligned}$$

这里我们用到(8)中 $\alpha = v_j u_j$，将最初的两个 α 写成 $v_{i_1} u_{i_1}$，将其次的两个 α 写成 $v_{i_2} u_{i_2}$，等等. 重新结合便得到下面的等式

$$\begin{aligned}\alpha^{2n} &= v_{i_1}(u_{i_1} v_{i_1} u_{i_1} v_{i_2})\cdots(u_{i_{n-1}} v_{i_{n-1}} u_{i_{n-1}} v_{i_n})(u_{i_n} v_{i_n} u_{i_n})\\ &= v_{i_1}(\alpha_{i_1} u_{i_1} v_{i_2})\cdots(\alpha_{i_{n-1}} u_{i_{n-1}} v_{i_n})(\alpha_{i_n} u_{i_n}).\end{aligned}$$

这里我们用到(8). 注意到(9)，容易看出，在上式右侧中去掉第一个 v_{i_1} 后所余下的 n 个括号组成的子字是一个 n-可裂字. ▮

利用上面这个命题可将命题 3 改进成下面的

命题 5 对于任意三个自然数 k, s, n 必存在一个自然数 $M(k,s,n)$，使得在长为 $M(k,s,n)$ 的含 k 个有序符号的字 α 中必含一子字 α_0 具有下列两种形式之一：

(i) $\alpha_0 = \beta^s$，并且 $1 \leqslant \beta$ 之长 $\leqslant n$，

(ii) α_0 是一个 n-可裂字.

证 $N(k,s,n)$ 之意义如命题 3 而令

$$M(k,s,n) = N(k,s',n), \tag{10}$$

其中 $s' = \max(2s, n)$. 设 α 是由 k 个有序符号 $\{x_1, \cdots, x_k\}$ 组成的字，设其长为 $M(k,s,n)$，则由命题 3 及(10)知，字 α 或者含有子字 $\alpha_0 = \beta^{s'}$，$1 \leqslant \beta$ 之长，或者含有 n-可裂子字，这样为了证明本

命题，要进一步讨论的唯一情形是：$\alpha_0=\beta^{s'}$ 而 β 之长 $=l>n$. 此时我们来证明：$\alpha_0=\beta^{s'}$ 或含有子字 β_0^s 且 $1\leqslant\beta_0$ 之长 $\leqslant n$ 或含有 n-可裂子字. 为此对 β 之长 l 作归纳法. 据命题 4，或者有 $\beta=\beta_0^t, t>1$，随之，β_0 之长 $<\beta$ 之长，或者 β^{2s} 中含有 s-可裂子字，因而含有 n-可裂子字. 在第一种情况，$\beta^{s'}$ 中含有子字 $\beta_0^{s'}$，注意到 β_0 之长 $<\beta$ 之长，这样用一下归纳法假设即得所求结果. 在第二种情况，注意到 $s'\geqslant 2s$，由 β^{2s} 中含有 n-可裂子字可得 $\beta^{s'}$ 中更含有 n-可裂子字，命题证完. ∎

由于采用组合的方法，因此和上节不同，在这里我们可以用交换环 Φ 上的代数来代替域 F 上的代数. 为此我们要引入相应的概念.

定义 8.4.3 Φ 是有单位元的交换环. 说 Φ-代数 A 是有限 Φ-代数，如果 Φ-模 A 是有限生成的. 说 Φ-代数 A 是局部有限的，如果 A 的任意有限子集生成一个有限 Φ-代数.

易见当 Φ 是域时这里的有限 Φ-代数的定义和域上代数的相应定义是一致的. 对于域上代数显然有有限代数是局部有限的. 对于 Φ-代数我们也有

命题 6 有限 Φ-代数 A 是局部有限的.

证 设 $u_1,\cdots,u_n$ 是 Φ-模 A 的一组生成元. 令 $H=\{b_1,\cdots,b_m\}$ 是 A 中任意有限个元素而来考察子代数 $B=\langle b_1,\cdots,b_m\rangle$. 此时我们有

$$u_iu_j=\sum\gamma_{ijk}u_k,\quad \gamma_{ijk}\in\Phi,$$
$$b_l=\sum\mu_{li}u_i,\quad \mu_{li}\in\Phi.$$

令 Φ' 是由集合 $\{\gamma_{ijk},\mu_{li},1,\forall\, i,j,k,l\}$ 在 Φ 中生成的子环. 根据 Hilbert 基的定理（参看 Jacobson(4)）知这个有限生成的交换环 Φ' 是 Noether 环. 易见

$$A'=\Phi'u_1+\cdots+\Phi'u_i$$

是 Φ'-代数且 $H\subseteq A'$. 考察 H 所生成的 Φ'-子代数 $B'\subseteq A'$. Φ'-模 A'，作为 Noether 环 Φ' 上的有限生成模，是 Noether 模，所以其子模 B' 是 Φ' 上的有限生成模. 但另一方面，我们知道 $B=\Phi B'$，

故 B 也是 Φ 上的有限生成模，即 B 是有限 Φ-代数. ▌

现在来叙证下面这个重要的 Ширшов 定理就没有什么困难了.

定理 8.4.1 设 A 是有单位元的交换环 Φ 上的一个代数. 若 A 满足一个次数为 d 的幺多项式恒等式且若代数 A 有一个生成元集 $\{a_i, i\in I\}$，I 可为任意足码集，而由这些 $a_i, i\in I$，作成的长小于或等于 d 的字(看成 A 中元素)都是 Φ 上代数元，则 Φ-代数 A 是局部有限的.

证 由于 A 中任意有限个元素所生成的子代数总包含在由有限个 a_i 所生成的子代数中，因而根据命题 6，欲证定理只要能证明，由 $\{a_1,\cdots,a_k\}$ 所生成的子代数 B 是 Φ 上有限代数即可.

取符号 $\{x_1,\cdots,x_k\}$ 所作得的自由代数 $\Phi[x_1,\cdots,x_k]$. 这时存在一个 $\Phi[x_1,\cdots,x_k]$ 到代数 B 上的自然同态对应 θ：

$$\theta:\ \Phi[x_1,\cdots,x_k]\to B$$
$$x_i\mapsto a_i,\quad i=1,\cdots,k.$$

命同态对应 θ 之核为 K. 此时易见 $\Phi[x_1,\cdots,x_k]$ 中两个元素 f，g 模 K 相等 (记作 $f\equiv g(K)$，指 $f-g\in K$)，当且仅当它们在 θ 下在 B 中的象相等：$f\theta=g\theta$. 由此即得定理中关于代数 A 的两条假设相当于关于 K 的下述两条性质：

(a) 对于任意 $u_1,\cdots,u_d\in\Phi[x_1,\cdots,x_k]$，

$$u_1\cdots u_d\equiv\sum_{1\neq\sigma\in S_d}\alpha_\sigma u_{\sigma(1)}\cdots u_{\sigma(d)}\qquad(K).$$

这是因为由本章 §2 命题 1，B 满足 d 次齐次线性幺多项式.

(b) 设 U 是 $\Phi[x_1,\cdots,x_k]$ 中一切次数 $\leqslant d$ 的单项式的集合，则存在一正整数 e，使得对任一 $u\in U$ 都有

$$u^e\equiv\{u^{e-1},\cdots,u \text{ 的一个 } \Phi\text{-线性和}\}\quad(K).$$

这是因为，依定理假设 $u\theta$ 都是 Φ 上代数元且 U 是一个有限集.

欲证代数 B 是有限生成的 Φ-模只要能证明下面这个命题 (C)：存在一个自然数 N，使得 $x_1,\cdots,x_k$ 的任意长大于 N 的字 (亦即 $\Phi[x_1,\cdots,x_k]$ 中次数大于 N 的单项式) 都能模 K 等于长小

于或等于N的字的Φ-线性和(亦即$\Phi[x_1,\cdots,x_k]$中次数$\leqslant N$的一个多项式)。

取$N=M(k,e,d)$。注意这时有$N>e$。

设自然数$l>N$并假设对长小于l的字上命题已成立而取α为长为l的一个字。由于长为l而按字典排列最小的字是x_1^l,并且依(b)(因为有$l>N>e$)以及上面的归纳假设,对于它命题是成立的,故我们还可以作如下的归纳假设:对长为l而小于α的字上命题已成立。下面在这双重归纳假设下证明对字α命题也成立。

依命题5,由于α的长$l>M(k,e,d)$,字α必有下面两种情形之一:字α或者含有形如α_1^e的子字,其中字α_1之长$\leqslant d$,因而有$\alpha_1\in U$,这时依上面的性质(b),

$$\alpha_1^e\equiv\{长<e 的一些字的线性和\}\ (K),$$

因而

$$\alpha\equiv\{长<l的一些字的线性和\}\ (K),$$

依归纳假设得

$$\alpha\equiv\{长\leqslant N的一些字的线性和\}\ (K);$$

或者字α含有d-可裂子字$\alpha'=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_d$,此时依上面的性质($a$),$\alpha'=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_d$模$K$等于一些与$\alpha'$同长但在字典排列中较$\alpha'$为小的字的线性和,这样$\alpha$本身也是模$K$等于一些长为$l$而较$\alpha$为小的一些字的线性和,关于这些字我们的上述第二个归纳假设保证命题(C)是成立的,故α模K等于长$\leqslant N$的一些字的线性和。总之无论那种情形都有α满足命题(C),故得定理。|

定理 8.4.2 (Ширшов) 设A是有单位元的交换环Φ上的一个代数。若A满足一个次数为d的幺多项式恒等式,且若代数A有一个生成元集$\{a_i,\ i\in I\}$,I可为任意足码集,而由这些a_i,$i\in I$,作成的长小于或等于d的字(看成A中元素)都是幂零元素,则A是局部幂零代数。

这个定理的证明和前面定理的证明完全类似,留给读者作为练习。

显然，上节中的 Kaplansky 定理和 Levitzki 定理是本节中 Ширшов 两个定理的推论，比较这些定理的陈述我们看到一个很重要的差别：Kaplansky 定理(Levitzki 定理）要求代数 A 的每一个元都是代数元(幂零元)，而在 Ширшов 定理只要求代数 A 中一部分元素是代数元或幂零元，特别当代数是有限生成的时候只要求其中特定的有限个元是代数元或幂零元.

与结合代数中 Курош 问题相平行的问题当然也可以对其他类型的代数提出．关于交错代数，Jordan 代数，Lie 代数的类似结果可参看 Ширшов[1]，[2]，Кострикин[1]，Латышев[1]，刘绍学[1]。

§ 5 Голод 的反例

在这一节中我们给出前面已提到的 Голод 的反例，从而否定地解决了群论中的 Burnside 问题和环论中的 Курош 问题.

设 F 是域．令 $T=F[x_1,\cdots,x_d]$是 F 上 d 个不可换不定元 $x_1,\cdots,x_d$ 的多项式环．T 可看作是 § 2 中定义过的 F 上 d 个不定元 $x_1,\cdots,x_d$ 的自由代数 $F[x_1,\cdots,x_d]$添加单位元而得，也就是有单位元的自由代数．这样，如令非零常数的次数为零，我们便有单项式、多项式、多项式的次数等概念，以及关于次数的相应结果(参看 § 2)。

设 n 是自然数，用 T_n 表示 T 中一切 n 次单项式所支撑成的子空间，亦即 T_n 是 T 中一切 n 次齐次多项式的全体，则有

$$T=T_0+T_1+\cdots+T_n+\cdots(\text{向量空间的直和}).$$

因为 T 中恰有 d^n 个不同的 n 次单项式，故 $(T_n:F)=d^n$．易见 $T_0=F$。

上面引入的符号在整个本节内通用.

命题 1 设 A 是由齐次多项式 $f_i, i\in I$，生成的理想，则 $A=A_0+A_1+\cdots+A_n+\cdots$，其中 $A_i=A\cap T_i$。

证 显然 $A\supseteq\sum A_i$．另一方面，形如

$$tf_it',\text{其中 } t,t'\text{是}T\text{中单项式}, \tag{1}$$

的元素都是齐次多项式且都在 A 中，因而必属于某一 $A_n=A\cap T_n$ 中. 注意到 A 中任意元素都是形如(1) 的元素的 F-线性和，即得命题. ▎

命题 2 设 A 是 T 中由元素 $f_1,f_2,f_3,\cdots$ 生成的理想. 设 f_i 是 $n_i\geq 1$ 次齐次多项式而 $\beta_n=(T_n/A\cap T_n:F)$，则对所有 $n\geq 1$，有不等式

$$\beta_n\geq d\beta_{n-1}-\sum_{n_i\leq n}\beta_{n-n_i}.$$

证 由上命题知

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}A_n,\quad \text{其中 } A_n=A\cap T_n.$$

取 A_n 在向量空间 T_n 中的一个补空间 B_n，则有 $T_n=A_n+B_n$ (空间的直和)，$\beta_n=(B_n:F)$.

今证，当 $n\geq 1$ 时

$$A_n\subseteq\sum_{j=1}^{d}A_{n-1}x_j+\sum_{n_i\leq n}B_{n-n_i}f_i. \tag{2}$$

注意到 A_n 是由形如(1) 且次数为 n 的元素支撑成的子空间，故欲证(2)，只要能证，当 $a=tf_it'\in A_n$，t,t' 是单项式时，必也有 a 属于(2)的右侧. 若 $t'\neq 1$，则有某个 j，使 $t'=t''x_j$. 这时 $a=tf_it''x_j=a'x_j$ 而 $a'\in A_{n-1}$，故有 $a\in A_{n-1}x_j$. 若是 $t'=1$，则 $a=tf_i$. 这时 t 是 $n-n_i$ 次单项式，故 $n_i\leq n$ 且

$$t\in T_{n-n_i}=A_{n-n_i}+B_{n-n_i}, \tag{3}$$

故有 $t=a_1+b_1$，$a_1\in A_{n-n_i}$，$b_1\in B_{n-n_i}$. 又因为 $n_i\geq 1$，又可把 f_i 写成 $f_i=\sum_j c_jx_j$，其中 c_j 或为零或为 n_i-1 次齐次多项式. 这样，注意到 $a_1c_j\in A\cap T_{n-1}=A_{n-1}$，有

$$a=tf_i=a_1f_i+b_1f_i=\sum_j a_1c_jx_j+b_1f_i\in\sum_j A_{n-1}x_j+B_{n-n_i}f_i.$$

至此我们便证得(2).

令 $\alpha_n=(A_n:F)$. 显然$(A_{n-1}x_i:F)=(A_{n-1}:F)=\alpha_{n-1}$, $(B_{n-n_i}f_i:F)=(B_{n-n_i}:F)=\beta_{n-n_i}$,由(2)便有

$$\alpha_n\leqslant d\alpha_{n-1}+\sum_{n_i\leqslant n}\beta_{n-n_i}. \tag{4}$$

注意到 $\alpha_n+\beta_n=(T_n:F)=d^n$,由(4)便得

$$\beta_n\geqslant d\beta_{n-1}-\sum_{n_i\leqslant n}\beta_{n-n_i}.$$

命题证完. ▌

下面是有很多重要应用，既简单又非常有力量的重要结果.

定理 8.5.1 (Голод-Шафаревич) 令 $T=F[x_1,\cdots,x_d]$ 是F上d个不交换不定元的多项式环. 令A是T中齐次多项式$f_i,i=1,2,3\cdots$,生成的理想,其中 f_i 的次数为 $n_i\geqslant2$,而 n_i 中等于 k 的个数 $r_k\leqslant(d-1)^2/4$,则T/A是无限维代数.

证 若 $d=1$,则$(d-1)^2/4=0$,即没有什么 f_i,故$A=0$. 此时$T/A=T$显然是无限维的.

今设 $d>1$. 继续延用上面命题中的符号,有

$$(T/A:F)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n.$$

因而欲证定理只要能知每一 $\beta_n\neq0$ 即可.由于 $n_i\geqslant2$,故 $A_0=A\cap T_0=0$, $A_1=A\cap T_1=0$. 这样 $\beta_0=1$, $\beta_1=d$. 今对 n 作归纳法,证明不等式

$$\beta_n\geqslant\frac{d-1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i. \tag{5}$$

由之,并注意到 $d>1$ 的假设,便知 $\beta_n\neq0$.

当 $n=1$ 时,(5)显然成立.

设 $n>1$. 由命题 2,有

$$\beta_n\geqslant d\beta_{n-1}-\sum_{n_i\leqslant n}\beta_{n-n_i}. \tag{6}$$

考察其右侧中的和 $\sum\limits_{n_i\leqslant n}\beta_{n-n_i}$. 由于 $n_i\geqslant2$,故 β_n 和 β_{n-1} 不会出现

在该和中．其次，在该和中 β_{n-k} 出现的次数刚好等于 f_i 中其次数等于 k 的个数 r_k，注意到 $r_k \leqslant (d-1)^2/4$ 以及 $n-n_i \leqslant n-2$，故有

$$\sum_{n_i \leqslant n} \beta_{n-n_i} \leqslant \frac{(d-1)^2}{4} \sum_{i=0}^{n-2} \beta_i. \tag{7}$$

这样，利用归纳法假设 $\beta_{n-1} \geqslant \frac{d-1}{2} \sum_{i=0}^{n-2} \beta_i$ 以及(6)，(7)便有

$$\beta_n \geqslant d\beta_{n-1} - \sum_{n_i \leqslant n} \beta_{n-n_i} \geqslant \frac{d-1}{2}\beta_{n-1} + \frac{d+1}{2}\beta_{n-1} - \frac{(d-1)^2}{4} \sum_{i=0}^{n-2} \beta_i$$

$$\geqslant \frac{d-1}{2}\beta_{n-1} + \left(\frac{(d+1)(d-1)}{4} - \frac{(d-1)^2}{4}\right) \sum_{i=0}^{n-2} \beta_i$$

$$= \frac{d-1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i.$$

定理证完．▎

下面是关于 Курош 问题的 Голод 反例．

定理 8.5.2 设 F 是任意可数域，则有 F 上无限维代数，它是幂零元代数且由三个元素生成．

证　令 $T = F[x_1, x_2, x_3]$，则 T 是可数集．和上面一样，$T = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots$．令 $M = T_1 + T_2 + \cdots$．M 是子代数．当然 M 也是可数集，故可把 M 的元素排列成：$s_1, s_2, \cdots$．任取正整数 $m_1 \geqslant 2$，则

$s_1^{m_1} \in T_2 + T_3 + \cdots$，$s_1^{m_1} = s_{12} + s_{13} + \cdots + s_{1k_1}$，其中 $s_{1j} \in T_j$．

选正整数 m_2，使

$$s_2^{m_2} \in T_{k_1+1} + T_{k_1+2} + \cdots,$$

$$s_2^{m_2} = s_{2,k_1+1} + \cdots + s_{2,k_2},\ s_{ij} \in T_j.$$

这样继续下去，可得一组正整数 $m_1, m_2, \cdots$ 以及正整数 $k_1 < k_2$

$<\cdots<k_i<\cdots$，使

$$s_i^{m_i}\in T_{k_{i-1}+1}+T_{k_{i-1}+2}+\cdots,$$

$$s_i^{m_i}=s_{i,k_{i-1}+1}+\cdots+s_{i,k_i},\quad s_{ij}\in T_j.$$

令所有 s_{ij}，$i=1,2,\cdots,j=k_{i-1}+1,\cdots,k_i$，在 T 中生成的理想为 A．由上面选取 s_{ij} 的作法知，它们都是具有不同次数的齐次多项式，故上定理中的 $r_k\leqslant 1,\forall k$．注意到 $d=3$，故有 $r_k\leqslant(d-1)^2/4$．这样，由上面定理知 T/A 是无限维的，因而 M/A 也是无限维的．由上面作法知，M 中的任意元素 s_i，有 $s_i^{m_i}\in A$，故代数 M/A 是幂零元素的．M 是由三个元素 x_1,x_2,x_3 生成的，故 M/A 也是由三个元素生成的． ▎

下面是关于 Burnside 问题的 Голод 反例．

定理 8.5.3 若 p 是任意素数，则有由三个元素生成的无限群，此群中每一元素的阶都是 p 的幂．

证 取 $F=J_p$，p 个元素的素域．令 M 和 A 顺序是 $T=F[x_1,x_2,x_3]$ 中依定理 8.5.2 的作法所得到的子代数和理想．令 $B=T/A$，$b_i=x_i+A\in B$，$i=1,2,3$．取 G 为 $1+b_1,1+b_2,1+b_3$ 生成的乘法半群．这样 G 中任意元素都可写成 $1+b$，而 $b\in M/A$．由上定理知 b 是幂零的，故有 n 使 $b^{p^n}=0$，注意到 F 的特征为 p，故

$$(1+b)^{p^n}=1+b^{p^n}=1.$$

即半群 G 实际上是一个群且每一元的阶都是 p 的幂．若 G 是有限群，则群代数 $F[G]=\langle G\rangle$ 是 B 的有限维子代数．但又因为 $1+b_i$ 和 1 都在 G 中，故 $F[G]=B$．这与上定理中说 $B=T/A$ 是无限维代数是矛盾的，故得定理． ▎

§ 6 Hamilton 代数

代数 A 的子集按满足的条件强弱为序可分为下列五个等级：子空间，子代数，次理想，理想，以及直和项．要求每一满足较弱条件的子集都是某一满足较强条件的子集，用这种方法可以划分出

一些特殊的代数类来．例如每一理想都是直和项的代数，这类代数我们在前面已讨论过．又例如每一子代数都是理想的代数，这是与 Hamilton 群（即每一子群都是正规子群的群，或称 Dedekind 群）相平行的代数类．我们将称之为 Hamilton 代数．相应地把每一子代数都是左理想的代数称之为左 Hamilton 代数，其他的还有如每一子代数都是次理想的代数等等．类似地，对其他代数系统，如群，环，Lie 环与代数等也可划分出一些相应的类去进行刻划．

本节的目的在于完全刻划左 Hamilton 代数和 Hamilton 代数，即证明下面的两个定理（参看刘绍学[3]，[4]）．

定理 8.6.1 设R是域F上的结合代数且R的每一子代数都是左理想，则R是且仅是下面类型的代数：

（一）零乘代数A（即$A^2=0$）；

（二）一维幂等代数$\langle e\rangle$，其中e是幂等元；

（三）$\langle e\rangle\oplus A$，其中$A^2=0$，e是幂等元；

（四）$\langle e\rangle+A$（向量空间的直和），其乘法表如下：$e^2=e$，$Ae=0$，$A^2=0$，$ea=a$，$\forall a\in A$；

（五）$A+B$（向量空间的直和），其乘法表如下：$AB=BA=AA=0$，a是A中一固定非零元，b_i，$i\in I$，是非零空间B的一个F-基，

$$b_ib_j=\beta_{ij}a,\ \beta_{ij}\in F,\ \forall i,j\in I,$$

其中系数β_{ij}满足下面的非退化条件：若W是I的任意有限子集，二次型$\sum\limits_{i,j\in W}\beta_{ij}x_ix_j$是非退化的，即若任取$x_i\in F$，$i\in W$，不全是零，则该二次型的值不为零；

（六）$\langle e\rangle\oplus(A+B)$，其中代数$A+B$为如（五）中给出者而$e$是幂等元．

定理 8.6.2 设R是域F上的结合代数且R的每一子代数都是理想，则R是且仅是上面定理内（一），（二），（三），（五），（六）中的代数．

这个定理是定理 8.6.1 的推论. 因为 Hamilton 代数既是左 Hamilton 代数,又是右 Hamilton 代数,而上定理中(四)中代数是左右不对称的, 其余的都是左右对称的, 故得.

下面来证定理 8.6.1. R 永远表示左 Hamilton 代数(简记左 H-代数),并把证明分写成若干个预理形式.

预理 1 R 是局部有限的.

证 由于R的每一个元素生成的子代数都是左理想, 因而欲证预理,只需证对任意 $a\in R$,$\langle a\rangle$是有限维的. 设$\langle a\rangle$是无限维的,则易见此时 $a^n, n=1,2,\cdots$,必是线性无关的. 考虑$\langle a^2\rangle$. 由于它是左理想,故 $a^3=a\cdot a^2\in\langle a^2\rangle$,这与 $a^n, n=1,2,\cdots$,是线性无关的相矛盾. 故得预理. |

预理 2 若R有非幂零元, 则$R=\langle e\rangle+C$ (向量空间的直和),其中 e 是幂等元,C是幂零元左 H-代数且 $Ce=0$.

证 设 $a\in R$ 是非幂零元,则$\langle a\rangle$ 是非幂零元的有限代数. 由定理 2.1.1 和定理 2.1.2 知$\langle a\rangle$中有幂等元 e. 考虑R关于幂等元 e 的左 Peirce 分解:

$$R=Re+C \qquad (\text{向量空间直和}),$$

其中 $C=\{x-xe\mid x\in R\}$是左理想, $Ce=0$. 由于$\langle e\rangle$是左理想,故 $Re=\langle e\rangle$. 即有

$$R=\langle e\rangle+C \qquad (\text{空间的直和}).$$

若C不是幂零元的, 则C中有非幂零元 b. 重复上面讨论知$\langle b\rangle$中有幂等元 e_1. 由于R是左 H-代数, 故$\langle e_1\rangle$是左理想, 因而有 $ee_1=\alpha e_1$, $\alpha\in F$. 由 $e_1\in C$ 而 $Ce=0$,故得

$$0=(e_1e)e_1=e_1(ee_1)=e_1(\alpha e_1)=\alpha e_1.$$

因而 $\alpha=0$,即 e,e_1 是互相正交的幂等元. 这样 $e+e_1$ 是幂等元而$\langle e+e_1\rangle$是一维左理想. 此时有

$$e_1=e_1(e+e_1)=\beta(e+e_1), \quad \beta\in F.$$

这与 e,e_1 必是线性无关元素相矛盾.故C是幂零元的.作为左 H-代数的子代数,易见C是左 H-代数. |

预理 3 R 中幂零元的幂零指数$\leqslant 3$.

证　设 $a\in R, a^n=0$ 而 $a^{n-1}\neq 0, n>3$．令 m 是 $(n+1)/2$ 的整数部分．令 $b=a^m$，则 $b^2=a^{2m}=0$．这样 $\langle b\rangle$ 是一维左理想，有

$$a^{m+1}=ab=\alpha b=\alpha a^m,\ \alpha\in F.$$

由于当 $n>3$ 时，$m+1<n$，故 $a^{m+1}\neq 0$，因而 $\alpha\neq 0$．这样就有 $a^{m+n}=\alpha^n a^m\neq 0$，这与 $a^n=0$ 是矛盾的．故 $n\leqslant 3$． ▎

预理 4　设 R 是幂零元的，$a,b\in R$ 且 $a^2=b^2=0$，则 $ab=ba=0$．

证　由于 $\langle a\rangle,\langle b\rangle$ 都是一维左理想，故

$$ab=\beta b,\ ba=\alpha a,\ \alpha,\beta\in F. \tag{1}$$

此时有

$$bab=b(\beta b)=0,\ bab=(\alpha a)b=\alpha\beta b.$$

故 $\alpha\beta=0$．由对称性，不妨设 $\beta=0$．此时注意到 $a+b$ 是幂零元以及预理 3，有

$$(a+b)^2=ba=\alpha a,$$
$$0=(a+b)^3=(a+b)\cdot\alpha a=\alpha^2 a,$$

故也有 $\alpha=0$．预理得证． ▎

取预理 2 中的 $R=\langle e\rangle+C$．令

$$A=\{a\in C\mid a^2=0\}. \tag{2}$$

则依预理 4，A 是子代数．任取定 A 在向量空间 C 中的一个补子空间 B，则有

$$C=A+B\qquad(\text{空间的直和}). \tag{3}$$

此时由预理 3 知，B 中非零元素都是幂零指数为 3 的幂零元．在下面的讨论中，我们将 C,A,B 的意义如上这样固定下来．

预理 5　设 $R=\langle e\rangle+A+B$，则必 $be=eb=0,\ \forall b\in B$．

证　由预理 2 知 $be=0$．其次，取 $0\neq b\in B$，$\langle b\rangle$ 是以 b 和 b^2 为基的二维左理想，故有

$$eb=\alpha b+\beta b^2,\ \alpha,\beta\in F,$$
$$eb^2=\alpha b^2.$$

由 $0=beb=\alpha b^2$，得 $\alpha=0$，即 $eb^2=0, eb=\beta b^2$．再由

$$\beta b^2=eb=eeb=e(\beta b^2)=0,$$

得 $\beta=0$,即有 $eb=0$. ∎

预理 6 设 $R=\langle e\rangle+A+B$,则或者 $ea=a$, $\forall a\in A$, 或者 $ea=0$, $\forall a\in A$.

证 取 $0\neq a\in A$. $\langle a\rangle$是一维左理想,故 $ea=\alpha a$, $\alpha\in F$. 由 $\alpha a=ea=eea=\alpha^2 a$ 得 $\alpha=0$ 或 $\alpha=1$. 若 $\exists a\in A$, 有 $ea=a$ 且 $\exists a'\in A$, 有 $ea'=0$,则

$$e(a+a')=a\in\langle a+a'\rangle.$$

随之也有 $a'\in\langle a+a'\rangle$. 这样一维左理想$\langle a+a'\rangle$含有两个线性无关的元素 a,a'. 这是矛盾的. 故得预理. ∎

预理 7 设 $R=\langle e\rangle+A+B$, 而 $B\neq\{0\}$, 则 $ea=0$, $\forall a\in A$.

证 任取 B 的一个非零元 b,则 $0\neq b^2\in A$. 但由预理 5, $eb^2=(eb)b=0$. 故由预理 6 知 $ea=0$, $\forall a\in A$. ∎

预理 8 设 $R=\langle e\rangle+A+B$,则 $ab=ba=0$, $\forall a\in A$, $\forall b\in B$.

证 由$\langle a\rangle$是一维左理想知 $ba=\beta a$, $\beta\in F$. 由预理 4 知, $0=b^2a=b(\beta a)=\beta^2 a$,故 $\beta=0$,即 $ba=0$.

另一方面,若 $0\neq b\in B$,则$\langle b\rangle$是二维左理想,故有

$$ab=\alpha_1 b+\alpha b^2,$$

$$ab^2=\alpha_1 b^2.$$

由预理 4 知 $ab^2=0$,故 $\alpha_1=0$, 即有 $ab=\alpha b^2$. 若 $\alpha\neq 0$, 则 $-\alpha^{-1}a+b\notin A$,因而它是幂零指数为 3 的幂零元素. 由上得 $0\neq(-\alpha^{-1}a+b)^2=(-\alpha^{-1}\alpha+1)b^2=0$. 此矛盾说明 $\alpha=0$,即 $ab=0$. ∎

预理 9 设 $R=\langle e\rangle+A+B$, 则 $b_1 b=\alpha b^2$, $\alpha=\alpha(b_1,b)\in F$, $\forall b_1,b\in B$.

证 由 $b_1 b=\alpha_1 b+\alpha_2 b^2$, $b_1 b^2=\alpha_1 b^2$ 及预理 8 有 $0=b_1 b^2=\alpha_1 b^2$,故 $\alpha_1=0$,即 $b_1 b=\alpha_2 b^2$. ∎

预理 10 设 $R=\langle e\rangle+A+B$, $0\neq b$ 是 B 中任一取定的元素,则 $b'^2=\alpha b^2$, $\alpha=\alpha(b')\in F$, $\forall b'\in B$.

证 取 B 的含元素 b 的一个基: b, b_i', $i\in I$. 由预理 9, $b_i'b=\alpha_i b^2$, $\alpha_i\in F$, $i\in I$. 令 $b_i=b_i'-\alpha_i b$,则

$$b_ib=(b_i'-\alpha_ib)b=0. \quad (4)$$

易见 b，b_i，$i\in I$ 仍是向量空间 B 的一个基．依预理 9 可设 $bb_i=\beta_ib_i^2$．此时有

$$b_i(b_i+b)=b_i^2\neq 0. \quad (5)$$

注意到 $b_i+b\in B$ 以及预理 9 和(4)有

$$b_i(b_i+b)=\gamma_i(b_i+b)^2=\gamma_i(b_i^2+b^2+b_ib+bb_i)$$
$$=\gamma_i(b_i^2+b^2+\beta_ib_i^2), \quad (6)$$

其中 $\gamma_i\in F$．由(5)，(6)有 $b_i^2=\gamma_i(b_i^2+b^2+\beta_ib_i^2)$，即

$$\gamma_ib^2=(1-\gamma_i-\gamma_i\beta_i)b_i^2.$$

但由(5)，(6)知 $\gamma_i\neq 0$，故 $(1-\gamma_i-\gamma_i\beta_i)\neq 0$，因而有

$$b_i^2=\delta_ib^2,\ \text{其中}\ \delta_i=\gamma_i(1-\gamma_i-\gamma_i\beta_i)^{-1}\in F. \quad (7)$$

任取 $b'\in B$，则由(7)及 $bb_i=\beta_ib_i^2=\beta_i\delta_ib^2$，$b_ib=\theta_ib^2$，$\theta_i\in F$，

$$b'=\varphi b+\sum\varphi_ib_i,\ \ \varphi,\varphi_i\in F$$

有
$$b'^2=(\varphi b+\sum\varphi_ib_i)^2=\alpha b^2,\ \ \alpha=\alpha(b')\in F. \ |$$

定理 8.6.1 的证明 设 R 是左 H-代数．依 R 中是否包含非幂零元，幂零指数为 3 的幂零元分别情形来讨论．

若 R 无非幂零元和幂零指数为 3 的幂零元，则依预理 4，R 是(一)中的零乘代数 A．

若 R 中有非幂零元而无幂零元，则依预理 2，R 是(二)中的幂等代数 $\langle e\rangle$，e 是幂等元．

若 R 有非幂零元而无幂零指数为 3 的幂零元，则依预理 2，6，知 R 或是(三)中的 $\langle e\rangle\oplus A$，或是(四)中的 $\langle e\rangle+A$．

若 R 无非幂零元而有幂零指数为 3 的幂零元，则由预理 5 前面的讨论，知 $R=A+B$，$B\neq 0$．取 B 的一个基：b_i，$i\in I$．依预理 8，9，10 有 $b_ib_j=\beta_{ij}a_0$，$\beta_{ij}\in F$，$0\neq a_0\in A$．依预理 4，8 有 $AA=0$，$BA=0$，$AB=0$．为了说明 β_{ij} 符合(五)中所说的非退化条件，取元素 $\alpha_i\in F$，$i\in K$，K 是 I 的一个有限子集，而 α_i 不全是零．令 $b=\sum_{i\in K}\alpha_ib_i$，则 $0\neq b\in B$，即 b 是幂零指数为 3 的幂零元，故有

$$0\neq b^2=\Big(\sum_{i,j\in K}\alpha_i\alpha_j\beta_{ij}\Big)a_0.$$

因而

$$\sum_{i,j\in K}\alpha_i\alpha_j\beta_{ij}\neq 0,$$

即 β_{ij} 符合非退化条件．故此时 R 是(五)中的代数 $A+B$．

若 R 有非幂零元及幂零指数为 3 的幂零元，则依预理 2 以及刚才的讨论，知 $R=\langle e\rangle+(A+B)$，其中代数 $A+B$ 如(五)中的代数．注意到 $B\neq 0$ 及预理 2,5,7 有 $e(A+B)=(A+B)e=0$，故 $R=\langle e\rangle\oplus(A+B)$，即得 R 是(六)中的代数．

至此，定理的必要性一面证明完毕．

另一方面，易见(一)至(六)中代数都是结合代数．(一)至(四)中代数显然是左 H-代数．下面来证明(五)中的代数 $A+B$ 是左 H-代数．为此只需证 $A+B$ 中任一元 x 生成的子代数都是左理想．若 $x\in A$，由于$(A+B)x=0$，故$\langle x\rangle$是左理想．若 $x=a+b$，$a\in A$，$0\neq b\in B$，则欲证$\langle x\rangle$是左理想，由(五)中的乘法表，只需证明 $a_0\in\langle x\rangle$ 就够了．用 B 的基 b_i 去表示 b，则有

$$x=a+\sum_{i\in K}a_ib_i,\quad a_i\in F,\ a\in A,$$

其中 K 是 I 的一个有限子集．依(五)中乘法表，

$$x^2=\Big(\sum_{i,j\in K}a_ia_j\beta_{ij}\Big)a_0.$$

依(五)中规定的 β_{ij} 符合非退化条件，故知上式中 a_0 的系数不为零，即 $a_0\in\langle x\rangle$．这样就证得(五)中代数 $A+B$ 是左 H-代数．随之，易见(六)中代数$\langle e\rangle\oplus(A+B)$也是左 H-代数．至此定理全部证完．▎

本节中我们是讨论左 H-结合代数．实际上对于交错代数这些定理也都成立的(参看刘绍学[3],[4])，对幂结合代数则只知道关于 H-代数的定理是对的(参看 Outcalt[1])．H-结合环也已完全刻划了(参看Андриянов[1])．一些广义 H-代数也已刻划

了(参看刘绍学[6]). 然而左H-结合环尚未刻划，有兴趣的读者可作为练习去作.

习　题

1. 证明代数A,B的外张量积$A\otimes_F B$与A,B的F-基的选择无关.

2. 设A，B是代数D的子代数而$C=AB$是A,B的内张量积. 证明$C=AB$同构于代数A,B的外张量积.

3. 已知域F上代数A,B. 设A^*,B^*顺序为对A，B添加单位元之后所得到的F上代数. 这样，A，B和其外张量积$C=A\otimes_F B$可以自然方式同构嵌入外张量积$A^*\otimes_F B^*=D$中，证明D的子代数C是D的子代数A，B的内张量积.

4. 举例说明两个 Artin 代数的张量积不一定是 Artin 代数.

5. 设A_α，$\alpha\in I$,是域F上的有限代数并且它们的维数是有界的. 证明$A_\alpha,\alpha\in I$,的全直和A是一个PI-代数.

6. 说多项式f是代数A的中心多项式，如果$f(A)\neq 0$且$f(A)$属于A的中心中. 证明$f(x_1,x_2)=[x_1,x_2]^2$是矩阵代数F_2的中心多项式.

7. 给出满足下列条件的F上有限代数R的所有不同构者（即在每一互相同构的代数集中选出一个代表来)：(一) F是复数域(实数域)，(二) 代数R有如定理 8.6.1 中(五)的乘法表.

8. 称域F上代数R为广义 Hamilton 代数，如果R的每一非零子代数都含有一个非零理想. 试刻划这类代数.

第九章　根与根的一般理论

关于一般环，我们已讨论了两种根：Jacobson 根（J-根）和 Levitzki 根（L-根）。在本章中将介绍 Baer 根，Koethe 根及 Brown-McCoy根，以及相应的半单环的结构定理，从中将看到素环是一个很重要的环类．并在这些具体根的背景下，介绍一下关于根的一般理论，即 Amitsur-Курош 的根理论．

§ 1　Baer 根与素环

在讨论 Baer 根之前，先介绍一下素环的概念，它在 Baer 半单环以及其他类型的半单环的结构定理中起重要的作用．

定义 9.1.1　设R是环而P是R的理想．说P是R的素理想，如果对于R的任意理想A，B，若 $AB\subseteq P$，则A，B中至少有一个含在P中．

由定义立得：若P是环R的素理想而R的理想$A\not\subseteq P$，$B\not\subseteq P$，则必 $AB\not\subseteq P$；或者说在商环$\bar{R}=R/P$中任意两个非零理想$\bar{A}$，$\bar{B}$之积$\bar{A}\bar{B}\neq\bar{0}$．

例如在整数环中，由素数p生成的理想(p)是素理想；在域F上多项式环$F[x]$中，既约多项式$p(x)$生成的理想$(p(x))$是素理想．上述素理想概念正是由这些例子启示得到的．

定义 9.1.2　说一个环R是素环，如果它的零理想是素理想．

这定义等于说，R是素环当仅且当其中任意两个非零理想的积都不是零．

易见，环R的理想P是素理想当且仅当商环R/P是素环．

域，没有零因子的环（即整域），单环都是素环的例子．由第七章，§5，命题 3 我们还有

命题 1 右(左)本原环是素环. ▎

存在有不是本原环的素环. 这样,本原环类是J-半单素环类的一个子类. 由于J-半单环的亚直和仍是J-半单环,这样J-半单环便是且仅是一些特殊素环,即J-半单素环的亚直和.

推广素环,素理想的概念便有

定义 9.1.3 说环R的理想Q是半素的, 如果对于R的理想A,若$A^2\subseteq Q$,必有$A\subseteq Q$. 称环R为半素环,如果R的零理想是半素理想.

显然,素环是半素环而素理想是半素理想. 由定义,并注意到单侧幂零理想包含在幂零理想中,便得

命题 2 (一) 环R的理想Q是半素的$\Longleftrightarrow$对R的任意理想A,若$A^n\subseteq Q$,则$A\subseteq Q$,其中n是某个自然数;

(二) R的理想Q是半素的$\Longleftrightarrow R/Q$是半素环;

(三) R是半素环$\Longleftrightarrow R$中没有非零幂零理想;

(四) R是半素环$\Longleftrightarrow R$中没有非零单侧幂零理想.

现在我们来定义 Baer 根. 粗略地说, 环R的 Baer 根N_B就是保证商环R/N_B中不再有非零幂零理想,并且是有此性质的理想中的“最小”者.

设R是环. 考虑R中一切幂零理想之和N_1. 考虑商环R/N_1.此商环中可能还有非零幂零理想.如果有,令其一切这样理想之和为N_2/N_1,其中$N_2\supseteq N_1$. 这样继续作下去. 一般说来,对任意序数σ,假定对任意$\lambda<\sigma$已定义好N_λ. 如果$\sigma-1$存在,则令$R/N_{\sigma-1}$中的一切幂零理想之和为$N_\sigma/N_{\sigma-1}$, 而得R的理想$N_\sigma\supseteq N_{\sigma-1}$. 如果$\sigma$是极限序数,则令$N_\sigma=\bigcup\limits_{\lambda<\sigma}N_\lambda$. 这样对任意序数$\sigma$都定义了$N_\sigma$. 因而总得有一个序数$\alpha$,使$N_\alpha=N_{\alpha+1}$. 我们称理想$N_\alpha$为环$R$的 Baer 根. 简记作$B$-根, 用$N_B$表之. B-根为零的环叫作B-半单环.

由B-根N_B的定义知商环R/N_B不含非零幂零理想, 即是B-半单环. 然而易见,B-半单环和半素环是完全相同的概念,这

样也就是说，R/N_B 是半素环．另一方面，由于有限个幂零理想之和仍是幂零理想，故知 N_1 是局部幂零理想．注意到局部幂零环借助局部幂零环所得到的扩张仍是局部幂零的以及局部幂零理想升链之并也是局部幂零的，利用超限归纳法可证得 N_B 是局部幂零理想．当然 N_B 更是幂零元理想．这样便得

定理 9.1.1 N_B 是环 R 的 Baer 根，则（一）R/N_B 是 B-半单环；（二）N_B 是局部幂零理想.

为了从另一个角度刻划 B 根从而得到 B-半单环的结构定理，引入下面

定义 9.1.4 称环 R 的元素序列 $a_i, i=1,2,\cdots$，为 m-序列，如果 $a_{i+1}\in a_iRa_i, \forall i$。

例如 $a_1=a, a_2=a_1c_1a_1, a_3=a_2c_2a_2, \cdots, a_{i+1}=a_ic_ia_i, \cdots$ 组成一个 m-序列，其中 $c_i\in R$ 是任意取定的元素．m-序列的概念是考虑素理想在整个环内的补集而得到的(参看章末所附习题)，这一点也可由下面证明中看到.

定理 9.1.2 环 R 的 B-根 $N_B=\bigcap_\alpha P_\alpha$，其中 P_α 取遍 R 中所有含 N_B 的素理想。

证 考察商环 $\bar{R}=R/N_B$．由素理想的定义可以立即看到，$P\supseteq N_B$ 是 R 的素理想当且仅当 P/N_B 是 $\bar{R}$ 的素理想．这样，欲证定理只需证 $\bar{0}=\bigcap_\alpha \bar{P}_\alpha$，其中 $\bar{P}_\alpha$ 取遍 $\bar{R}$ 中的所有素理想．故不妨设 R 的 B-根 $N_B=0$ 而去证 $0=\bigcap_\alpha P_\alpha$。

任取 $0\neq a\in R$，则由于 R 是 B-半单环，故 (a) 不是幂零理想，因而对任意正整数 n，$(a)^n\neq 0$．由于 $(a)^3\subseteq RaR$，故 $(RaR)^n\neq 0$．由之得 $aRa\neq 0$．故 $\exists c_0\in R$，使 $a_1=ac_0a\neq 0$．关于 a_1 重复上面的讨论，便得 $c_1\in R$，有 $a_2=a_1c_1a_1\neq 0$．这样继续作下去便得到一个 m-序列：$a, a_1, a_2, \cdots$．考察集合

$$W=\{I\mid I \text{ 是 } R \text{ 的理想}, I\cap\{a,a_1,a_2,\cdots\}=\phi\}.$$

因为零理想在 W 中，故 W 不空．易见由 W 中理想组成的升链之并也在 W 中，故依 Zorn 引理，W 中有极大元．取其一，记作 P_a．

今证 P_a 是素理想．为此只需证：若理想 $A\supset P_a$，$B\supset P_a$，则 $AB\not\subseteq P_a$．依 P_a 的极大性，知有 $a_n\in A, a_m\in B$．不妨设 $n\geqslant m$．此时必也有 $a_n\in B$．从而 $a_{n+1}=a_nc_na_n\in AB$．但 $a_{n+1}\notin P_a$，故有 $AB\not\subseteq P_a$．即证得 P_a 是素理想．

显然 $a\notin P_a$．这样对任意非零元素 a，都有不含 a 的素理想 P_a，故所有素理想之交 $\bigcap_a P_a=0$．❙

命题 3 B-半单环的亚直和仍是 B-半单的．

证 设 $R=\sum_S\oplus R_i$(亚直和)，其中 $R_i, i\in I$ 是 B-半单环．把 R 到 R_i 上的射影记作 π_i，若 R 有 B-根 $N_B\neq 0$，则依亚直和定义，必 $\exists i$，使 $N_B\pi_i\neq 0$．直接由 B-根的定义，或由上面定理都易推得，$N_B\pi_i$ 包含在 R_i 的 B-根中，这将与 R_i 的 B-半单性矛盾．故 R 是 B-半单的．❙

由上面定理 2 和命题 3 即得半单环的结构定理．

定理 9.1.3 R 是 B-半单环 $\Longleftrightarrow R$ 是一些素环的亚直和．❙

为了从元素的角度来刻划 B-根，我们引入

定义 9.1.5 称环 R 的元素 a 为强幂零元素，如果以 a 为首项的任意 m-序列 $a, a_1, a_2, \cdots$，在有限步之后都是零．

强幂零元素 a 必是幂零元素．这是因为，$a, a^3, a^7, a^{15}, \cdots$ 是以 a 为首项的 m-序列，因而必得在有限项之后都是零，即有 a 之幂是零，故 a 是幂零的．

定理 9.1.4 环 R 的 B-根 N_B 恰由 R 的一切强幂零元素组成．

证 若 $a\notin N_B$，重复定理 9.1.2 的一段证明，可得以 a 为首项的 m-序列 $a, a_1, a_2, \cdots$ 且 $a_i\neq 0, \forall i$．这样 a 不是强幂零元素．故 R 中强幂零元素都在 N_B 中．

另一方面，任取 $a\in N_B$，而 $a=a_0, a_1, a_2, \cdots$ 是以 a 为首项的任

意 m-序列．显然所有 $a_i\in N_B$．由构造 N_B 的方法知每一 a_i 属于某一 N_α(见 B-根的归纳法定义)．令 $a_i\in N_{\alpha_i}$ 而 α_i 为有此性质的最小序数．显然 α_i 不是极限序数．令所有 α_i 中之最小者为 α_k．由于 α_k 不是极限序数，故 $\alpha_k=1$ 或 $\alpha_k=\alpha+1$．为了统一地进行讨论，约定当 $\alpha_k=1$ 时，$\alpha=0$ 而 N_0 为零理想．这样 $(a_k)\subseteq N_{\alpha_k}=N_{\alpha+1}$ 且 $((a_k)+N_\alpha)/N_\alpha$ 是 R/N_α 的幂零理想．故 $(a_k)^{2m}\subseteq N_\alpha$．但

$$a_{k+1}=a_kc_ka_k\in(a_k)R(a_k)\subseteq(a_k)^2,$$
$$a_{k+2}=a_{k+1}c_{k+1}a_{k+1}\in(a_k)^2R(a_k)^2\subseteq(a_k)^4.$$

这样继续作下去就得

$$a_{k+m}\subseteq(a_k)^{2m}\subseteq N_\alpha. \qquad (1)$$

当 $\alpha_k=\alpha+1$，$\alpha>0$ 时，(1)和 α_k 的最小性是矛盾的．故只能是 $\alpha_k=1$，而此时(1)说明 $a_{k+m}=0$，从而知以 a 为首项的 m-序列必在有限步后为零．这就证明了 a 是强幂零元素．▎

最后，谈一下没有真理想的环，我们将称之为**弱单环**．由于弱单环 R 的 B-根 N_R 或是零或是 R，故它或是 B-半单环或是 B-根环，即其 B-根等于整个环者．易见 B-半单、弱单环恰是一切单环，而弱单、B-根环恰是一切平方为零的弱单环，后者将称为**零单环**．

§ 2 Koethe 根，Levitzki 根

Baer 根的引入是为了使 B-半单环不含非零的幂零理想．用幂零元理想替代幂零理想便得 Koethe 根．然而在历史上 Koethe 根在先，且是对一般环引入的第一个根．

命题 1 (一) 设 N 是环 R 的理想，若 N 和 R/N 都是幂零元环，则 R 也是．

(二) 幂零元理想组成的升链之并也是幂零元理想．▎

由命题 1 知在 R 中必存在最大幂零元理想，用 N_k 表之，它包含 R 的一切幂零元理想且 R/N_k 没有非零幂零元理想．引入

下面

定义 9.2.1 称环 R 的最大幂零元理想 N_k 为 R 的 Koethe 根，简记作 K-根．K-根为零的环叫作 K-半单环．▌

便得

定理 9.2.1 设 R 是环，则其 K-根 N_K 是存在的，且有性质：（一）N_K 包含 R 中一切幂零元理想；（二）R/N_K 是 K-半单环．▌

我们知道幂零单侧理想必包含在幂零理想中，局部幂零单侧理想必包含在局部幂零理想中．右拟正则右理想必包含在右拟正则理想中．然而关于幂零元单侧理想却有下面至今未解决的所谓

Koethe 问题：是否每一幂零元单侧理想都包含在一个幂零元双侧理想中．

下面我们从另一个角度刻划 K-根从而可给出 K-半单环的结构定理(参看王湘浩[1])．

定理 9.2.2（王湘浩） 环 R 的 K-根 $N_K=\bigcap_{\alpha} P_\alpha$，其中 P_α 取遍 R 中一切具有下面性质的理想：P_α 是素理想，$P_\alpha \supseteq N_K$ 且 R/P_α 是 K-半单的．

证 与定理 9.1.2 的证明开头时一样的讨论，可知欲证定理，只需考虑当 R 的 K-根 N_K 为零时而去证明 $0=\bigcap_{\alpha} P_\alpha$，其中 P_α 是素理想而 R/P_α 是 K-半单的．

任取 $0\neq a\in R$，由 R 的 K-半单性知(a)不是幂零元理想．故 $\exists b\in(a)$，而 b 不是幂零元素．令 $H=\{b^n,\forall n\}$．考虑

$$W=\{I \mid I \text{ 是 } R \text{ 的理想且 } I\cap H=\phi\}.$$

由于零理想在 W 中，因而 W 不空．易见对 W 可应用 Zorn 引理，因而 W 中有极大元，取其一，记作 P_a。今证 P_a 是素理想．为此只需证，若理想 $A\supset P_a, B\supset P_a$，则必 $AB\nsubseteq P_a$．由 P_a 的极大性知有正整数 m,n，使 $b^m\in A, b^n\in B$，因而 $b^{m+n}\in AB$，故 $AB\nsubseteq P_a$．即 P_a 是素理想．

现在剩下来要证的是，R/P_a 为 K-半单的．若是 R/P_a 有非零的幂零元理想，则有理想 $N \supset P_a$ 且 N/P_a 是幂零元的．但由 $N \supset P_a$ 及 P_a 的极大性知，必有 m 使 $b^m \in N$．由于 $P_a \cap \{b^n, \forall n\} = \phi$，故 $b^m + P_a$ 是 N/P_a 中的非幂零元素，这与 N/P_a 是幂零元环相矛盾．故知 R/P_a 是 K-半单的．

这样对任意 $0 \neq a \in R$ 都有素理想 P_a，有 R/P_a 是 K-半单环而 $a \notin P_a$．故 $0 = \bigcap_a P_a$．定理得证．▍

命题 2 K-半单环的亚直和仍是 K-半单的．▍

由上面定理及命题 2，便有

定理 9.2.3（王湘浩） 环 R 是 K-半单的 $\Longleftrightarrow R$ 是一些 K-半单、素环的亚直和．▍

现在我们来讨论 Levitzki 根．

在第五章中对代数定义了 Levitzki 根或 L-根．对于环有完全类似的定义和结果，其证明也是完全相同的．为了便于对比，我们把主要结果再写一下．

命题 3 （一）若理想 N 和商环 R/N 都是局部幂零的，则 R 本身也是；

（二）局部幂零理想升链之并仍是局部幂零理想．▍

定理 9.2.4 （一）环 R 有最大的局部幂零理想，称之为 L-根，记作 N_L．它含有 R 的一切局部幂零单侧理想；

（二）R/N_L 的 L-根为零，L-根为零的环叫做 L-半单环．▍

关于 L-根也有另外的刻划方法(Бобич[1])．

定理 9.2.5 环 R 的 L-根 $N_L = \bigcap_a P_a$，其中 P_a 取遍所有具有下面性质的素理想：$P_a \supseteq N_L$ 且 R/P_a 是 L-半单的．

证 证明方法和前面定理 2 的证明是完全一样的．设 P_a 如定理中所述，则由 $(N_L + P_a)/P_a$ 是 L-半单环 R/P_a 的局部幂零理想，故 $(N_L + P_a)/P_a = 0$，即 $N_L \subseteq P_a$，因而 $N_L \subseteq \bigcap_a P_a$．

反之，任取 $a\notin N_L$，则(a)不是局部幂零理想．故存在有限生成的子环 $T\subseteq(a)$而T不是幂零的．考虑

$$W=\{I\mid I\text{ 是}R\text{的理想},I\supseteq N_L\text{ 且 }T^n\nsubseteq I,\forall n\}.$$

N_L 必在 W 中．这是因为，若存在自然数 n，使 $T^n\subseteq N_L$，则由T有有限生成元 $a_1,\cdots,a_m$，T^n 也必有有限生成元 $\{a_{i_1}\cdots a_{i_k},i_j\in\{1,\cdots,m\},n\leqslant k<2n\}$，因而 T^n 将是幂零的，这与T的选择是矛盾的．还因为，对任意 n，T^n 是有限生成，故 W 中任意升链之并仍在 W 中．依 Zorn 引理，W 中有极大元．取其一，记作 P_a．与定理 9.2.2 完全类似地去证可知 P_a 是素理想且 R/P_a 是 L-半单的．但 $a\notin P_a$，故 $a\notin\bigcap\limits_a P_a$．即 $N_L\supseteq\bigcap\limits_a P_a$．与前面证得的合在一起便是 $N_L=\bigcap\limits_a P_a$．▎

命题 4 L-半单环的亚直和是 L-半单的．▎

由上定理及命题 4 便得

定理 9.2.6 环R是L-半单的$\Longleftrightarrow R$是L-半单的、素环的亚直和．

最后，与前节一样，我们讨论一下弱单环的问题．显然零单环（即 $R^2=0$ 的弱单环R）是L-根环也是K-根环．另一方面，我们有

定理 9.2.7 单环必是L-半单的．

证 设R是单环．任取 $0\neq a\in R$，则有 $RaR=R$．因而 $a=\sum\limits_{i=1}^{m}r_ias_i$．令$A$是有限个元素 $r_i,s_i,i=1,\cdots,m$，生成的子环．若R不是L-半单的，则$R=N_L$是局部幂零的，因而有正整数 n，使 $A^n=0$．由

$$a=\sum_i r_ias_i=\sum_i r_i\Big(\sum_j r_jas_j\Big)s_i=\sum_j r'_jas'_j,$$

其中 $r'_j,s'_j\in A^2$．重复这样迭代下去，便有

$$a = \sum_i r_i^{(n)} a s_i^{(n)},$$

其中 $r_i^{(n)}, s_i^{(n)} \in A^n = 0$. 这样 $a=0$. 这是矛盾. 故知单环 R 是 L-半单的. ❙

然而关于 K-根却有下面至今仍未解决的

问题：是否存在单幂零元环.

§ 3 Brown-McCoy 根

Koethe 根是用元素的幂零性来刻划的，即环的 Koethe 根是其最大的幂零元理想. 类似地，J-根是用元素的右拟正则性去刻划的. 前面我们已看到右拟正则性是元素的幂零性的自然推广. 下面我们对元素的右拟正则性作进一步的推广而得到 g-正则性. 利用它，采用上述格式，可得一个新的根，即 Brown-McCoy 根. 这种推广的目的是想用有单位元的单环去代替环的Jacobson 理论中的本原环.

首先回顾一下. 利用环 R 的元素 a 可确定 R 的一个正则右理想 $J(a)=\{x+ax, \forall x\in R\}$. a 是右拟正则元当且仅当 $a\in J(a)$. 当 $a\in J(a)$时，显然有 $J(a)=R$. 故也可以说，a 是右拟正则元当且仅当 $J(a)=R$.

现在任取 $a\in R$，利用 a 如下确定 R 的一个理想

$$G(a)=\left\{x+ax+\sum_i (x_i a y_i + x_i y_i), \forall x, x_i, y_i \in R\right\}.$$

易见 $J(a)\subseteq G(a)$. 用 $G(a)$代替 $J(a)$ 便得右拟正则性的推广.

定义 9.3.1 R 的元素 a 叫做 g-正则元，如果 $a\in G(a)$.

易见，$a\in G(a)$当且仅当 $G(a)=R$.

定义 9.3.2 称环 R 的理想 A 是 g-正则理想，如果 A 的每一个元素都是 R 的 g-正则元.

命题 1 在环 R 中任意多个 g-正则理想之和仍是 g-正则理想.

证　由于任意多个理想的和的每一个元素必含在其中某有限个理想之和中，故欲证命题，只需证明任意两个 g-正则理想之和仍是 g-正则的。

设 I_1, I_2 是 R 的 g-正则理想，任取 $a\in I_1, b\in I_2$。由于 $a\in G(a)$，故有 $x, x_i, y_i\in R$，使

$$a=ax+x+\sum_i (x_i a y_i+x_i y_i).$$

利用这些 x, x_i, y_i，作

$$c=(a+b)x+x+\sum_i (x_i(a+b)y_i+x_i y_i)\in G(a+b).$$

直接计算得

$$a+b-c=b-bx-\sum_i x_i b y_i. \tag{1}$$

由于 $b\in I_2$，故(1)的右侧在 I_2 中，因而 $a+b-c\in I_2$ 且它是 R 中的 g-正则元。因而有 $w, u_j, v_j\in R$ 使

$$a+b-c=(a+b-c)w+w+\sum_j (u_j(a+b-c)v_j+u_j v_j).$$

令

$$d=(a+b)w+w+\sum_j (u_j(a+b)v_j+u_j v_j),$$

$$e=c-cw-\sum_j u_j c v_j.$$

就有 $a+b=d+e$。由于 $c\in G(a+b)$，故 $e\in G(a+b)$。再注意到 $d\in G(a+b)$，故得 $a+b\in G(a+b)$，即 $a+b$ 是 g-正则元。 |

定义 9.3.3　称环 R 的最大 g-正则理想（依命题 1，它是存在的）为 R 的 Brown-McCoy 根或 BM-根，简记作 N_{BM}。其 BM-根为零理想的环叫做 Brown-McCoy 半单环或 BM-半单环。

命题 2　R/N_{BM} 是 BM-半单环。

证　令 $\bar{R}=R/N_{BM}$。设 $\bar{R}$ 有 g-正则理想 $\bar{A}=A/N_{BM}$ 并取 $A\supseteq N_{BM}$。任取 $a\in A$，则由 $\bar{a}\in\bar{A}$，因而 $\bar{a}\in G(\bar{a})$，故有 $x, x_i, y_i\in R$

使 $a-(ax+x+\sum_i(x_iay_i+x_iy_i))\in N_{BM}$。令

$$c=ax+x+\sum_i(x_iay_i+x_iy_i)\in G(a). \qquad (2)$$

由 $a-c\in N_{BM}$，知 $a-c$ 是 g-正则元．故有 $w,u_j,v_j\in R$ 使

$$a-c=(a-c)w+w+\sum_j(u_j(a-c)v_j+u_jv_j).$$

由之得

$$a=aw+w+\sum_j(u_jav_j+u_jv_j)+c-cw-\sum_j u_jcv_j. \qquad (3)$$

由(2)，(3)即得 $a\in G(a)$．这样 A 是 g-正则理想．但 N_{BM} 是 R 中一切 g-正则理想之和，故 $A\subseteq N_{BN}$，即 $\bar{A}=0$。这样 $\bar{R}$ 无非零的 g-正则理想，即是 BM-半单的．▎

把命题 1，2 写在一起便是

定理 9.3.1 环 R 的 BM-根 N_{BM} 有性质：(一) N_{BM} 是 g-正则理想且包含 R 的一切 g-正则理想；(二) 商环 R/N_{BM} 是 BM-半单的.

下面命题给出弱单环是 BM-半单的充要条件.

命题 3 设 R 是弱单环，则 R 是 BM-半单的 $\Longleftrightarrow R$ 有单位元 1.

证 "$\Leftarrow$"．设 R 是有单位元 1 的单环．由于 $G(-1)=0$ 而 $-1\neq 0$，故 -1 不是 R 的 g-正则元，故 R 的 BM-根不能是 R，因而由 R 的单性知，R 是 BM-半单的.

"$\Rightarrow$"．设 R 是弱单环且是 BM-半单的．此时 R 必有非 g-正则元 $a\neq 0$，即 $a\notin G(a)$。这样 $G(a)$ 是异于 R 的理想，由 R 的弱单性得 $G(a)=0$。因而 $ax+x=0,\forall x\in R$．即 $-a$ 是 R 的左单位元．为了证明 $-a$ 也是右单位元，考虑左理想 $I=\{xa+x,\forall x\in R\}$。注意到 $-a$ 是左单位元，故 $IR=0$，因而 I 是理想．再由 R 的弱单性，$I=R$ 或 $I=0$。若 $I=R$，则 $\exists b\in R$，使 $ba+b=a$，因而

$$ab=bab+bb=b(ab+b)=b\cdot 0=0,$$

即 $b=0$，随之 $a=0$. 这与 $a\neq 0$ 是矛盾的. 故只能有 $I=0$. 此时显然得 $-a$ 是 R 的右单位元. 总起来，便得 $-a$ 是 R 的单位元. ∎

为了刻划 BM-半单环的结构，与前面类似，我们从另一个角度来刻划 BM-根.

定理 9.3.2 环 R 的 BM-根 $N_{BM}=\bigcap_{\alpha} M_{\alpha}$，其中 M_{α} 取遍 R 中具有下面性质的理想：R/M_{α} 是有单位元的单环.

证 先来证明：若 $a\notin N_{BM}$，则 $a\notin\bigcap M_{\alpha}$. $a\notin N_{BM}$ 说明 (a) 不是 g-正则理想. 因而 $\exists b\in(a)$ 而 $b\notin G(b)$. 设 W 为 R 中一切含 $G(b)$ 而不含 b 的理想组成的集. 由于 W 中一切升链之并仍在 W 中，依 Zorn 引理，W 中有极大元. 取其一，记作 M_{α}. M_{α} 还是 R 的极大理想，这是因为，若理想 $A\supset M_{\alpha}$，则 $b\in A$ 且 $G(b)\subseteq A$，因而将有 $A=R$. 这样 $\bar{R}=R/M_{\alpha}$ 是弱单环. 设 $\bar{b}=b+M_{\alpha}$. 注意到 $G(\bar{b})=\bar{0}$ 而 $\bar{b}\neq\bar{0}$，则知 $\bar{R}$ 含有非 g-正则元 $\bar{b}$. 由 $\bar{R}$ 的弱单性知 $\bar{R}$ 是 BM-半单的. 依命题 3，知 $\bar{R}$ 是有单位元的单环. 由 $b\notin M_{\alpha}$，易得 $a\notin M_{\alpha}$，随之有 $a\notin\bigcap M_{\alpha}$. 即证得 $\bigcap M_{\alpha}\subseteq N_{BM}$.

其次证明 $N_{BM}\subseteq\bigcap M_{\alpha}$. 容易看到，在同态对应：$R\to\bar{R}=R/M_{\alpha}$ 下 N_{BM} 的像 $\bar{N}_{BN}$ 是 $\bar{R}$ 的 g-正则理想. 由命题 3 知 $\bar{R}$ 是 BM-半单的，故 $\bar{N}_{BM}=\bar{0}$，即 $N_{BM}\subseteq M_{\alpha}$，$\forall\alpha$. 即有 $N_{BM}\subseteq\bigcap M_{\alpha}$. 总起来便是 $N_{BM}=\bigcap M_{\alpha}$. ∎

由于 BM-半单环的亚直和仍是 BM-半单的，由上定理及命题 3 便得

定理 9.3.3 环 R 是 BM-半单的 $\Longleftrightarrow$ R 是有单位元的单环的亚直和. ∎

§4 一般根论

前面我们看到对于结合环(以及其他代数系统)可用不同方法定义根的概念，如 B-根，L-根，K-根，J-根，BM-根等. 对于每

一种根有相应的半单环的概念．在这个背景下，五十年代初，Amitsur 和 Курош 同时独立地创立了根的一般理论．它概括了以上这些根的共性，给出建立根概念的一般方法．在这一般理论的启示下，对这些具体根以及其间的关系有更进一步的了解．

我们在所有结合环组成的类中讨论根的一般理论．

用字母 r 表示环可能具有的一个性质．具有性质 r 的环记作 r-环．所有 r-环组成结合环的一个子类．反之，给定结合环类的一个子类，而称属于此子类中的环为 r-环，便得到一个性质 r．因而给定一个性质 r 也就是给定一个环类．

说环 R 的理想 A 是 r-理想，如果 A 作为一个环，它是 r-环．下面只讨论 r-环类不空的性质 r．

定义 9.4.1 称性质 r 为根性质，如果有

($R1$) r-环的同态像仍是 r-环；

($R2$) 任一环 R 都有一个 r-理想 N，它包含 R 的一切 r-理想；

($R3$) 商环 R/N 不含非零的 r-理想．

由此定义可知$\{0\}$是 r-环．

定义 9.4.2 若环 R 中有一个最大 r-理想 N，即 N 本身是 r-理想且 N 包含 R 的一切 r-理想，就称 N 为环 R 的 r-根．若环 R 的 r-根存在且是零理想时，就称 R 是 r-半单环；若环 R 的 r-根存在且等于 R 本身时，就称 R 为 r-根环．

易见，当 r 是根性质时，R 是 r-根环当且仅当 R 是 r-环．下面结果给出 r-根环和 r-半单环之间的关系．

命题 1 若 r 是根性质，则 R 是 r-根环当且仅当 R 不能同态地满射到非零的 r-半单环上去．

证 设 R 是 r-根环，即是 r-环．由($R1$)知 r-环 R 的同态像仍是 r-环，而非零 r-半单环不是 r-环，故得 R 不能同态地满射到非零的 r-半单环上去．反之，依($R2$)，环 R 有 r-根 N．若 $R\neq N$，则依($R3$)，$R\sim R/N$，而后者是非零的 r-半单环．故若 R 不能同态于非零 r-半单环，它必是 r-根环． ▎

下面定理给出根性质的另一种定义方法，在验证一个性质是根性质时用它是方便的。

定理 9.4.1 性质 r 是根性质当且仅当 r 满足下列两条：

($R1'$) r-环的同态像仍是 r-环；

($R2'$)若一个环 R，它的任意非零同态象都含有非零 r-理想，则 R 本身是 r-环.

证 ($R1$)，($R2$)，($R3$)$\Rightarrow$($R1'$)，($R2'$). 只需证($R2'$)，设环 R 满足($R2'$)中的前提. 依($R2$)，R 有 r-根 N. 若 $R\neq N$，则 $R\sim R/N\neq 0$ 且依($R3$)，后者没有非零 r-理想，这和关于 R 的假设矛盾. 故 $N=R$，即 R 是 r-环，因而证得($R2'$).

($R1'$)($R2'$)$\Rightarrow$($R1$)，($R2$)，($R3$). 先来证($R2$). 任取环 R. R 有 r-理想，因为由($R1'$)，零理想是 r-理想.设 N 是 R 中一切 r-理想的和.这样，为了证($R2$)，只需证 N 是 r-理想.若 $N=0$，则 N 显然是 r-理想.若 $N\neq 0$，任取 N 的同态象 $\bar{N}=N/B\neq 0$. 此时必有 R 的 r-理想 $A\nsubseteq B$. 依同构定理有 $(A+B)/B\cong A/(A\cap B)$.此式左侧说明它是 $\bar{N}$ 的非零理想，而右侧说明它是 r-环 A 的同态象，依($R1'$)，它该是 r-环，这说明 N 的非零同态象 $\bar{N}$ 都含有非零的 r-理想，依($R2'$)知 N 是 r-环，即证得($R2$).

今证($R3$)，依刚证过的($R2$)，环 R 有 r-根 N. 若 $\bar{R}=R/N$ 有非零 r-理想 $\bar{A}$. 设 A 是 $\bar{A}$ 在 R 中的完全逆象，则 $A\supset N$. 这样 A 是 r-环 N 借助 r-环 $\bar{A}$ 所得到的扩张. 今证 A 必是 r-环. 为此取 A 的理想 B 而考虑 A 的非零同态象 A/B. 若 $B\supseteq N$，则

$$A/B\cong(A/N)/(B/N)=\bar{A}/\bar{B}.$$

作为 r-环 $\bar{A}$ 的同态象，A/B 是 r-环. 若 $B\nsupseteq N$，则

$$0\neq(N+B)/B\cong N/B\cap N.$$

作为 r-环 N 的同态象，$(N+B)/B$ 是 A/B 的 r-理想. 这样便知 A 是满足($R2'$)中的前提，因而依($R2'$)，A 是 r-环，即 A 是 R 的 r-理想，因而 $A\subseteq N$，这与 $A\supset N$ 是矛盾的. 故 R/N 没有非零的 r-理想，即证得($R3$). ❙

这样只要我们有一个满足($R1'$)，($R2'$)的环类便可得一个根

性质．对任意给定的非空环类 Ω，用下述方法可以构造出一个满足($R1'$)，($R2'$)的环类 $r(\Omega)$．

把 Ω 中所有环的一切同态象称作(关于 Ω 的)一级环．显然 Ω 中环，依定义都是一级环．而一级环的同态象都是一级环．

设对小于 β 的一切序数 α 都已定义了 α 级环且满足下列条件：

(i) α 级环的同态象仍是 α 级环；

(ii) 对于 $\alpha<\alpha'<\beta$，每一 α 级环也是 α' 级环．

现在我们来定义 β 级环，并且还要保证对 $\beta+1$ 言(即用 $\beta+1$ 代替 β)，(i)，(ii)仍成立．若 β 是极限序数，则规定环 R 是 β 级环，如果 R 是 α 级环，$\alpha<\beta$．在此情况条件(i)，(ii)对于 $\beta+1$ 是成立的．为了证明(i)，只需证明：β 级环 R 的同态象是 β 级环．由 β 级环的定义知，R 是 α 级环，$\alpha<\beta$．依超限归纳法假设知，$\bar{R}$ 也是 α 级环．再依 β 级环的定义知 $\bar{R}$ 是 β 级环，即证得(i)．其次为了证明(ii)，只需证明：当 $\alpha<\beta<\beta+1$ 时，α 级环是 β 级环．依 β 级环的定义，这是显然的．

若 β 不是极限序数，即 $\beta-1$ 存在，则规定环 R 是 β 级环，如果 R 的任意非零同态象含有非零理想，它是 $\beta-1$ 级环．今证此时条件(i)，(ii)对 $\beta+1$ 也成立．为了证明(i)，设 R 是 β 级环，$\bar{R}$ 是 R 的同态象．由于 $\bar{R}$ 的非零同态象 $\bar{\bar{R}}$ 也是 R 的非零同态象，依上面的规定，$\bar{\bar{R}}$ 含 $\beta-1$ 级环作为其理想．因而依 β 级环的定义知 $\bar{R}$ 是 β 级环．这就证得(i)．为了证明(ii)，只需考察 $\beta-1<\beta<\beta+1$ 这一情况，即只需证 $\beta-1$ 级环 R 是 β 级环．依超限归纳法假设，$\beta-1$ 级环的同态象仍是 $\beta-1$ 级环，故 R 的任意非零同态象 $\bar{R}$ 必含有 $\beta-1$ 级环作为其非零理想($\bar{R}$ 本身就是这样的理想)，依 β 级环的定义，R 是 β 级环．即证得(ii)．

这样，我们利用超限归纳法，对任意序数 β 定义了 β 级环，且对任意序数 β 都有(i)，(ii)．令 $r(\Omega)$ 为一切 β 级环组成的环类，其中 β 为一切序数．易见 $r(\Omega)\supseteq\Omega$ 且由 Ω 完全决定．今证 $r(\Omega)$ 满足($R1'$)，($R2'$)．由(i)知，$r(\Omega)$满足($R1'$)是显然的．为了证

明$(R2')$，令环R的每一非零同态象R_i都含有非零理想I_i，I_i作为环是在$r(\Omega)$中的．这样I_i必是某α_i级环．令R_i，$i\in I$，是R的一切非零同态象．由集合论知必存在一序数$\beta\geqslant\alpha_i$，$\forall i\in I$．这样，依(ii)知所有I_i都是β级环，因而由上面的α级环的定义知R是$\beta+1$级环，即R也在$r(\Omega)$中．这就证明了$(R2')$．故得

定理 9.4.2 环类$r(\Omega)$所定义的性质$r_{(\Omega)}$是一个根性质．

此定理给我们一个获得根性质的方法．为得到另一个构造根性质的方法，与上面的讨论相对偶的，我们也可以从半单性出发来定义根的概念，这一点可以在下面定理中看到．

定理 9.4.3 （一）设r是一个根性质，则一切r-半单环组成的类Φ满足下面两性质：

$(S1)$ Φ中任意环的非零理想可同态地满射到Φ的非零环上；

$(S2)$ 若一环R，其每一非零理想都可同态地满射到Φ的非零环上，则R在Φ中．

（二）设Φ是满足$(S1)$，$(S2)$的一个环类，则必存在某一根性质r，Φ恰是由一切r-半单环组成的环类．

证 （一）设Φ是r-半单环类．任取Φ中的一个环R以及其中任意理想$I\neq0$．由于R是r-半单的，故I不是r-环，因而由命题1，I可同态地满射到非零r-半单环上去，这就证得Φ满足$(S1)$．为了证明$(S2)$，设R不在Φ中，此时R不是r-半单的．因而有非零的r-根I．再依命题1，I作为r-环必不能同态地满射到非零r-半单环上去．因而适合$(S2)$中前提的环必在Φ中，即Φ满足$(S2)$．

（二）设Φ为满足$(S1)$，$(S2)$的一个环类．命题1启示我们利用Φ如下引入一个性质r：如果环R不能同态地满射到Φ中非零环上去，就说R是r-环．今证性质r满足$(R1')$，$(R2')$．设R是r-环而$\bar{R}\neq0$是其同态象．若$\bar{R}$不是r-环，则由定义，$\bar{R}$可同态地满射到Φ中非零环$\bar{\bar{R}}$上去．这样也就有$R\sim\bar{\bar{R}}$，这和R是r-环相矛盾．故$\bar{R}$是r-环，即证得$(R1')$．为了证明$(R2')$，设R是一个

环且适合($R2'$)中的前提. 若是R不是r-环, 即它能同态地满射到$\varPhi$中非零环R_1上去. 由于R满足($R2'$)中的前提,故R_1中含有非零r-理想I_1,而I_1作为r-环它不能同态地满射到$\varPhi$中非零环上去. 依($S1$),这与I_1是$\varPhi$中环的非零理想是矛盾的. 故r满足($R2'$).

这样,性质r是根性质. 现在剩下来要证的是,$\varPhi$恰是r-半单环类. 任取$\varPhi$中的环R, 则由($S1$),其非零理想不能是r-环. 即R无非零r-理想,故R是r-半单的. 反之,若R是r-半单的,则其任意非零理想I都不是r-理想. 因而依性质r的定义,I可同态地满射到$\varPhi$中的非零环上去. 再依($S2$)便知环R在$\varPhi$中. 这样便知$\varPhi$恰是r-半单环类. ∎

上面定理说明,为了有一个根性质, 只要有一个满足($S1$),($S2$)的环类就可以了. 下面命题说只要有满足($S1$)的环类也就可以了.

命题 2 若环类$\varPhi$满足($S1$). 设$\overline{\varPhi}$是由具有下面性质的环R组成的环类: 环R的任意非零理想可同态地满射到$\varPhi$的非零环上去,则$\overline{\varPhi}$满足($S1$), ($S2$). 此时$\overline{\varPhi}$依定理 9.4.3(二)所确定的根性质记作$r^{(\varPhi)}$.

证 首先,由于$\varPhi$满足($S1$),故$\varPhi$含在$\overline{\varPhi}$中. 这样,易见$\overline{\varPhi}$也有($S1$). 为了证明$\overline{\varPhi}$也满足($S2$), 任取环R, 设其每一非零理想I都可同态地满射到$\overline{\varPhi}$中的非零环R_1上去. 由于R_1在$\overline{\varPhi}$中,依定义,R_1(作为它自己的非零理想)可同态地满射到$\varPhi$中非零环R_2上去. 这样便有$I\sim R_1\sim R_2$,即R的非零理想I可同态地满射到$\varPhi$中非零环R_2上. 再依$\overline{\varPhi}$的定义, 知R在$\overline{\varPhi}$中, 即$\overline{\varPhi}$满足($S2$). ∎

找满足($S1$)的环类的最简单的方法就是取弱单环类的一个子类$\varPhi$. 由于弱单环的非零理想只有它本身, 因而环类$\varPhi$满足($S1$).

上面的讨论说明存在着许多不同的根性质. 这样很自然地该规定个方法,以比较它们之间的关系.

给一个根性质 r，它确定两个相对立的环类：r-根环（即 r-环）类与 r-半单环类，顺序记作 $R(r)$ 和 $S(r)$。易证下面结果

命题 3 设 r, r' 是两个根性质，则 $R(r)\subseteq R(r') \Longleftrightarrow S(r)\supseteq S(r')$。 ▎

定义 9.4.3 设 r, r' 是两个根性质，说 $r\leqslant r'$，如果 $R(r)\subseteq R(r')$。

定理 9.4.4 (一)若 Ω 是非空环类，依定理 9.4.2，它确定一个根性质 $r_{(\Omega)}$，则 $r_{(\Omega)}\leqslant r$，其中 r 是满足 $\Omega\subseteq R(r)$ 的任意根性质；

(二) 若 Φ 是满足(S1)的非空环类，依命题 2，它确定一个根性质 $r^{(\Phi)}$，则 $r\leqslant r^{(\Phi)}$，其中 r 是满足 $\Phi\subseteq S(r)$ 的任意根性质。

证 (一)设 R 是 $r_{(\Omega)}$-环，则由 $r_{(\Omega)}$ 之定义知 R 必是关于 Ω 的某个 α 级环。今用超限归纳法证明一切 α 级环都是 r-环。由于 $\Omega\subseteq R(r)$，故一切零级环(即 Ω 中的环)都是 r-环。今设对于一切小于 β 的序数 α，α 级环都已证是 r-环。令 R 是 β 级环。若 β 是极限序数，则 R 必是 α 级环，$\alpha<\beta$。依归纳假设 R 是 r-环。若 β 不是极限序数，则依 β 级环的定义，R 的任意非零同态象含有非零理想，它是 β-1 级环，因而依归纳假设，它必是 r-环。注意到根性质 r 满足($R2'$)，故必知 R 是 r-环。这就证得一切 α 级环都是 r-环，即 $r_{(\Omega)}\leqslant r$。

(二) 由命题 2 及定理 9.4.3 (二)知，$r^{(\Phi)}$-半单环类恰是环类 $\overline{\Phi}$（见命题 2）。因而欲证(二)只需证明 $\overline{\Phi}\subseteq S(r)$。注意到 r-半单环类 $S(r)$ 是有性质(S2)的，由假设 $\Phi\subseteq S(r)$ 以及 $\overline{\Phi}$ 的定义便知 $\overline{\Phi}\subseteq S(r)$，即得 $r\leqslant r^{(\Phi)}$。 ▎

由于有了上面定理，我们给出下面

定义 9.4.4 定理 4 中的根性质 $r_{(\Omega)}$ 称为由环类 Ω 确定的下根；根性质 $r^{(\Phi)}$ 称为由环类 Φ 所确定的上根。

这样下根 $r_{(\Omega)}$ 是一切以 Ω 中环为根环的最小根性质而上根 $r^{(\Phi)}$ 是一切以 Φ 中环为半单环的最大根性质。

§5 各种根与一般根论

在本节中我们简短地从一般根论的角度讨论一下各种具体根.

首先要弄清楚的是,各种具体根是由哪些根性质刻划的,也就是问这些根的根环是怎样一个环类.

显然,局部幂零性是确定 Levitzki 根的根性质,这是因为环 R 的 L-根是 R 的一切局部幂零理想的和,而环 R 的理想 I 是局部幂零理想当且仅当 I 作为环时是个局部幂零环.

类似地,幂零元性是确定 Koethe 根的根性质.

关于 Jacobson 根,我们得稍微小心一点. 我们知道,说一个环 R 是右拟正则环,如果 R 中任意元素 x 在 R 内有右拟逆元 x',即在 R 内有满足关系 $x+x'+xx'=0$ 的元素 x';说一个环 R 的理想 I 是右拟正则理想,如果 I 中任意元素 x 在 R 内有右拟逆元. 这样从表面上看右拟正则理想 I, 作为环来看, 不一定是右拟正则环. 然而很容易证: 环 R 的属于右理想 I 的右拟正则元 x 也必是环 I 的右拟正则元. 这是因为 x 在 R 中的右拟逆元 $x'=-(x+xx')\in I$. 这样我们就可以说,环 R 的理想 I 是右拟正则理想当且仅当 I 作为环时是右拟正则环. 因此, 右拟正则性是确定Jacobson 根的根性质.

为了说明 Baer 根是可以由一个根性质来定义的,我们先引进一个

定义 9.5.1 说一个环 R 是 b-环, 如果 R 的任意非零同态象都含有非零幂零理想.

由于性质 b 满足 §4 中的$(R1')$和 $(R2')$, 故它是个根性质. 先证一个

命题 1 设 $N\subseteq I\subseteq R$, N 是 I 的理想而 I 是 R 的理想 (即 N 是 R 的二级次理想), 则 N 在 R 中所生成的理想(N) 有性质: $(N)^3\subseteq N$.

证　由于 $(N)=N+RN+NR+RNR$，则注意到 $RN\subseteq I$，$NR\subseteq I$ 便得 $(N)^3\subseteq INI\subseteq N$．|

命题 2　(一)R 是 Baer 半单环$\Longleftrightarrow R$ 是 b-半单环；(二)Baer 根恰是由根性质 b 所确定的 b-根．

证　(一)"$\Rightarrow$"．若 R 是 Baer 半单环，则 R 中没有非零幂零理想．设 I 是 R 的 b-理想．若 $I\neq 0$，则环 I，作为自己的非零同态象，依定义含有非零幂零理想 N．由命题 1，$(N)^3\subseteq N$，即 (N) 是 R 的非零幂零理想，这和 R 是 Baer 半单环是矛盾的．故 $I=0$．即 R 也是 b-半单环．

"$\Leftarrow$"．若 R 是 b-半单环，则 R 没有非零 b-理想，随之更没有非零幂零理想，因为幂零理想当然是 b-理想．故 R 是 Baer 半单的．

(二) 设 N,N' 顺序为环 R 的 Baer 根，b-根．由于 R/N 是 Baer 半单，依(一)，它也是 b-半单，故 $N'\subseteq N$．类似地我们还有 $N\subseteq N'$．故 $N=N'$．|

现在来考察 Brown-McCoy 根．设 R 是环，$a\in R$．我们曾定义过理想

$$G(a)=\left\{x+ax+\sum_i(x_iay_i+x_iy_i),\forall x,x_i,\ y_i\in R\right\}.$$

现在引入符号

$$H(a)=\left\{\sum_i(x_iay_i+x_iy_i),\forall x_i,\ y_i\in R\right\}.$$

并且约定：若 I 是 R 的子环而 $a\in I$，则在环 I 内作的 $G(a)$ 和 $H(a)$，顺序记作 $G_I(a),H_I(a)$．为了说明 BM-根是由 g-正则性所确定的根，我们需要证明，环 R 的 g-正则理想 I，当把它作为环看时，环 I 是 g-正则的，即是对任意 $a\in I$，若 $a\in G(a)$，必也有 $a\in G_I(a)$．先证

命题 3　(一)若 $RaR\subseteq H(a)$，则 $H(a)=R^2$；

(二) 若 I 是 R 的理想且 $a\in G(a)\cap I$，则 $H_I(a)=I^2$；

(三) 若 a 的奇次幂 a^n 是 R 的 g-正则元，则 a 也是 R 的 g-正

则元.

证 (一) 显然 $H(a)\subseteq R^2$. 而当 $RaR\subseteq H(a)$, 则易见有 $R^2\subseteq H(a)$, 因而有 $H(a)=R^2$.

(二) 依假设, $\exists\, x, x_i, y_i\in R$, 使

$$a=x+ax+\sum_i(x_iay_i+x_iy_i).$$

若 $u,v\in I$, 注意到 I 是 R 的理想, 则有

$$uav=uxv+uaxv+\sum_i(ux_iay_iv+ux_iy_iv)\in H_I(a).$$

即 $IaI\subseteq H_I(a)$. 由(一)便得 $H_I(a)=I^2$.

(三) 令 $b=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^ia^i$, 则注意到 n 为奇数有 $a^n=a+(b+ab)$. 由于 a^n 为 g-正则元, 故有 $x, x_i, y_i\in R$, 使

$$\begin{aligned}a+(b+ab)&=x+(a+b+ab)x+\sum(x_i(a+b+ab)y_i+x_iy_i)\\&=\{x+ax+\sum(x_iay_i+x_iy_i)\}+(b+ab)x\\&\quad+\sum x_i(b+ab)y_i\in G(a).\end{aligned}$$

上式中我们用到 $b+ab\in G(a)$. 由之便有 $a\in G(a)$, 即知 a 是 g-正则元. ▮

下面定理给出 BM-根的另一种刻划方法.

定理 9.5.1 设 N 是环 R 的 BM-根, 则下述条件是等价的:

(一) $b\in N$;

(二) RbR 中每一元素 a 都有 $a\in G(a)$;

(三) RbR 中每一元素 a 都有 $a\in H(a)$.

证 (一)⇒(二). 依(一)知 (b) 是 g-正则理想, 由 $RbR\subseteq(b)$, 便得 RbR 中元素都是 g-正则元, 即得(二).

(二)⇒(三). 任取 $a\in RbR$, 则由 $a\in G(a)$, 由命题 3 (二)(取 $I=R$) 便得 $H(a)=R^2$, 因而有 $a\in RbR\subseteq R^2=H(a)$.

(三)⇒(一). 对任意 $a\in RbR$, 有 $a\in H(a)\subseteq G(a)$. 故 RbR 是 R 的 g-正则理想. 任取 $x\in(b)$, 则 $x^3\in RbR$, 因而 x^3 是 g-正

则元．由命题 3（三）知，x 也是 g-正则元．即(b)是 g-正则理想，故 $b\in N$．∎

定理 9.5.2 设N是环R的BM-根而I是R的理想，则环I的BM-根 $N'=I\cap N$．

证 首先证明$N\cap I\subseteq N'$．若$b\in N\cap I$，则$IbI\subseteq N\cap I$．因此若任取$a\in IbI$，则 $a\in G(a)\cap I$，因而依命题 3（二），$H_I(a)=I^2$．但$a\in IbI\subseteq I^2=H_I(a)$，这样对环$I$应用上面定理 1，使得$b\in N'$，即得 $N\cap I\subseteq N'$．

其次来证 $N'\subseteq N$．若 $b\in N'$，则R的理想$IRbRI\subseteq N'$．由之知$I(RbR)I$ 中的元素都是环I 的g-正则元．应用定理 1 便知 $RbR\subseteq N'$．这样 RbR 中元素也都是环I的 g-正则元，因而更是环R中的g-正则元．再依定理 1 便得$b\in N$．即证得 $N'\subseteq N$．总起来便是$N'=N\cap I$．∎

这个定理说，整个环R的BM-根N与R的理想I之交 $N\cap I$恰是环I的 BM-根．这叫做 Brown-McCoy 根具有继承性．我们知道所有这五个具体根都具有继承性，其证明留给读者作为练习．

现在可以解决开始时提出的问题了．先引入

定义 9.5.2 说一个环R是 g-环，如果环R是一个 g-正则环．

定理 9.5.3 （一）环 R 的理想 I 是 g-正则理想$\Longleftrightarrow I$ 是 R 的 g-理想（即环 I 是一个 g-环）．

（二）环 R 的 BM-根恰是由根性质 g 确定的 g-根．

证 （一）“$\Leftarrow$”是显然的．

“$\Rightarrow$”．设 N 为环 R 的 BM-根，则依假设 $I\subseteq N$．设环 I 的 BM-根为 N'，则由定理 2 知 $N'=I\cap N=I$，即 I 等于其 BM-根，因而环 I 是 g-正则环，即 I 是 R 的 g-理想．

（二）由（一）以及前节证明的 BM-根的存在性，便知性质 g 是根性质．再由（一）便知 BM-根$=g$-根．∎

至此，我们说明了全部五个根都是由根性质确定的．实际上，

根性质正是由这些具体根抽象出来的.

容易看到,这些根的大小顺序是：B-根$\leqslant L$-根$\leqslant K$-根$\leqslant J$-根$\leqslant BM$-根. 有例子说明(参看Divinsky[1])实际上它们之间的关系是

$$B\text{-根} < L\text{-根} < K\text{-根} < J\text{-根} < BM\text{-根}.$$

例如Голод例说明L-根$<K$-根.

下面我们从构造一般根性质的角度来考察一下这些具体根,也就是问：这些具体根是从某一环类Ω出发所确定的下根$r_{(\Omega)}$吗？或者是从某一类单环M出发所确定的上根$r^{(M)}$吗？

由于这些具体根都有它相应的根性质,若取$\Omega(M)$为其相应的根环(半单环)的全体,则该根当然就等于下根$r_{(\Omega)}$(上根$r^{(M)}$).所以在上面的问题中,Ω该取其根环类的一个真子类.

定理 9.5.4 B-根是由幂零环类Ω所确定的下根$r_{(\Omega)}$.

证　令$r=r_{(\Omega)}$. 为了证明定理只需证明：r-环是且仅是B-根环. 依命题2,这就是要证性质$r=$性质b. 由于幂零环都是b-环,即Ω中的环都是b-环,故由定理9.4.4. 知性质$r\leqslant b$. 反之,若R是b-环,则依性质b的定义,R的任一非零同态像都含有非零的幂零理想. 这就是说,R是关于幂零环类Ω的二级环,因而R是r-环. 这样便得$b\leqslant r$. 合起来就是$b=r$. ▎

定理 9.5.5 BM-根是由有单位元的单环类所确定的上根U.

证　由定理9.4.4知,BM-根$\leqslant U$-根. 剩下来要证的是：每一U-根环必是BM-根环,或者等价地,不是BM-根环的环R必也不是U-根环. 设R的BM-根为N,由于R不是BM-根环,故$N\neq R$,随之$R/N\neq 0$. 依定理9.3.3知R/N是有单位元的单环的亚直和,因而R/N可满同态于某一有单位元的单环,随之环R也可以. 依上根U的定义,R不是U-根环. ▎

与这个定理相关的,在Курош[1]中曾提出关于J-根的类似问题：J-根是否是由一切J-半单的单环(亦即单、本原环)类所确定的上根. 而在此以前(以及在Курош[1]中)曾提出更基本的

问题：单环都是 J-半单的吗？ 或者换一个说法：Jacobson 意义下的单根环存在吗？首先我们有

定理 9.5.6 单环 R 是 J-半单的 $\Longleftrightarrow$ 单环 R 有极大右理想.

证 "$\Rightarrow$". 设 R 是 J-半单的，则 $\exists a\in R$，a 不是右拟正则元，即 $a\notin J(a)$. 这样 $J(a)$ 是异于 R 的正则右理想. 依第七章§2命题 4，$J(a)$ 可扩大成 R 的极大右理想.

"$\Leftarrow$". 设 I 是 R 的极大右理想. 首先证明： $xR\subseteq I$ 当且仅当 $x\in I$. 为此考虑 $J=\{y\in R\,|\,yR\subseteq I\}$. 易见 $I\subseteq J$ 且 J 是右理想. 注意到 $R^2=R$，故 $J\neq R$. 这样由 I 的极大性便知 $I=J$. 即证得 $xR\subseteq I$ 必 $x\in I$. 反之，显然有，若 $x\in I$ 则 $xR\subseteq I$.

任取 $b\notin I$，则 $R=I+bR$. 这样 $b=a-bb'$，$a\in I$. 令 $R_b=\{x\in R\,|\,bx\in I\}$，$R_b$ 是 R 的右理想. 对任意 $y\in R$，由

$$b(y+b'y)=(b+bb')y=ay\in I,$$

有 $y+b'y\in R_b$. 所以我们还知 $J(b')\subseteq R_b$.

若 R 是 J-根环，则 b' 是右拟正则元，故有 $R=J(b')\subseteq R_b$，即 $R=R_b$. 注意到 R_b 之定义得 $bR=bR_b\subseteq I$. 但 $b\notin I$，这与上面刚证的结果矛盾. 故 R 不是 J-根环，即 R 是 J-半单的. ‖

此定理说明：单根环恰是无极大右理想的单环. Sasiada[1]（参看 Sasiada, Cohn[1]）给出了单根环的第一个例子，从而解决了单根环的存在问题. 下面我们简单介绍一下这个例子. 先证一个 J-根具有继承性的定理.

定理 9.5.7 设 I 是环 R 的理想，则环 I 的 J-根 N' 恰是 R 的 J-根 N 与 I 的交：$N'=N\cap I$.

证 令 N' 在 R 中生成的理想为 (N'). 注意到 N' 是环 R 的二级次理想，由命题 1 知 $(N')^3\subseteq N'\subseteq (N')$. 这样 $(N')^3$ 中的元素都是环 I 的（因而更是环 R 的）右拟正则元. 这样对任意 $a\in (N')$，a^3 是右拟正则元. 与 BM-根的情况类似，若令 $b=-a+a^2$，则 $a^3=a+(b+ab)$. 令 a^3 的右拟逆元为 $-c$，则有

$$a+(b+ab)=c+ac+(b+ab)c\in J(a).$$

由之便得 $a\in J(a)$，即 a 也是右拟正则元. 这样便知 (N') 是 R 的

右拟正则理想，故得 $N'\subseteq(N')\subseteq N$.

另一方面，注意到环 R 的 J-根本身是右拟正则环，故 $N\cap I$ 是环 I 的右拟正则理想，故 $N\cap I\subseteq N'$. 合起来便是 $N\cap I=N'$. ❙

Sasiada 的例：令 F 是任意域而 A 是 F 上两个不可换不定元 x,y 的一切形式幂级数的全体. 按照形式幂级数的形式和及形式积的运算，A 作成一个环. 令 A' 为 A 中一切常数项为零的幂级数的全体. 今证 A' 是 A 的 J-根，任取 A 中元素

$$a=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3x^2+\alpha_4xy+\alpha_5yx+\alpha_6y^2+\cdots,\ \alpha_i\in F.$$

若常数项 $\alpha_0\neq0$，则利用形式的长除法，用幂级数 a 去除 1 必可得 a 的左逆元和右逆元，因而这样的元素 a 必不是右拟正则元，随之必不在 A 的 J-根中. 另一方面，若 $a\in A'$，则 $1+a$ 是常数项非零的元素，因而有右逆元，即 a 是右拟正则元. 这样 A' 是 A 的最大右拟正则理想，即是 A 的 J-根. 这样环 A' 是 J-根环. 其次，我们有

命题 A 在环 A' 中，$x\notin(x-yx^2y)$，即 x 不在元素 $x-yx^2y$ 所生成的理想中.

这是一个看起来很容易相信对而证起来相当繁的一个结果. 我们略去其证明. 有兴趣的读者可参看 Sasiada, Cohn[1] 或 Herstein[1].

命题 A 肯定了 A' 中存在一个理想具有性质：含 $x-yx^2y$ 而不含 x. 依 Zorn 引理可得一有此性质的极大理想 U. 令 $R=A'/U$. 作为 J-根环 A' 的同态像，R 是 J-根环. 由 U 的极大性知 R 的任意非零理想必含元素 $\bar{x}=x+U$，由 U 的选择知 $\bar{x}\neq\bar{0}$. 这样 R 中一切非零理想之交 $S\neq\{\bar{0}\}$ 且 $\bar{x}\in S$. 作为 J-根环的理想，S 本身是 J-根环.

为了说明 S 是单环. 先来证 $S^2=S$. 由 $\bar{x}\in S$，故 $\bar{x}\bar{y}$, $\bar{y}\bar{x}$ 都在 S 中，随之 $\bar{x}=\bar{y}\bar{x}^2\bar{y}=(\bar{y}\bar{x})(\bar{x}\bar{y})\in S^2$. 这样 S^2 是 R 的非零理想，故有 $S\subseteq S^2$，即 $S=S^2$. 现在来证 S 是单环. 设 B 是 S 的非零理想，则 B 是 R 的二级次理想，由命题 1 及 $S=S^2$ 得：$S=S^3\subseteq$

$(B)^3 \subseteq B \subseteq S$. 故 $B=S$,即 S 是个单环.

至此我们得到环 S 是单根环.

至于上面提到的关于 J-根是否是单本原环类所确定的上根,在 Sasiada,Sulinski [1]中给出一个例子说明它是不成立的(参看 Divinsky(1)).

关于根以及一般根论我们就介绍到这里. 从本世纪初出现有限代数的幂零根开始,三十年代有 Artin 环的幂零根,到四十年代出现各种根,到五十年代初在 Курош[1]和 Amitsur [2]中总结出根的一般理论. 谢邦杰[1]给这一段工作作了很好的总结. 之后继续发展,到现在已形成环论中的一个特殊分支. 已有了两本关于这个题目的专著: Divinsky(1)和 Szasz(1). 后者附有大量文献并提出许多待解决的问题. 我们把它们推荐给感兴趣的读者.

在学习本章时阅读 Курош[1]是很有益的.

本章中所介绍的各种根对于其他许多环类,特别是对交错环,Jordan 环,Lie 环也都有相应的讨论. 参看 Жевлаков 等 (1) 和 Amago 等(1).

与环论平行的,在群论中也引入了根的一般理论,读者可参看 Курош[2].

谢邦杰[2]中引入了一种有趣的根.

习 题

1. 设 R 为环而 $\Sigma=\{I \mid I$ 是 R 的理想且 R/I 不含非零的幂零理想$\}$. 设 $I_0=\bigcap_{I\in\Sigma} I$. 试证 $I_0\in\Sigma$.

2. 环 R 的一个理想 I 是素理想当且仅当对任意元素 $b,c\in R$ 由 $bRc\equiv 0 \pmod I$ 可得或 $b\equiv 0 \pmod I$ 或 $c\equiv 0 \pmod I$.

3. M 是环 R 的一个子集. 若对任意元素 $b,c\in M$ 必有一个元素 $x\in R$ 使得 $bxc\in M$,则称 M 为 m-系. 试证 R 的理想 I 是素理想当且仅当 I 在 R 中的补集是 m-系.

4. R 是环. 证明 R 的任一 m-叙列(看成集合)都是 m-系; 反之, 任一

m-系都包含有一个 m-叙列。

5．设 r 是结合环类中的一个根性质。设 N 是环 R 的 r-根。令 ψ 是环 R 的任意自同态，则有 $N\psi\subseteq N$。

6．设 r 为根性质，则环 R 的 r-理想链

$$N_1\subseteq N_2\subseteq\cdots\subseteq N_a\subseteq\cdots$$

之并 $\bigcup_a N_a$ 仍是 R 的 r-理想。

7．设 r 是根性质而 R 为结合环，I 为 R 的一个理想。试证环 I 的 r-根 $r(I)$（以下把环 A 的 r-根记作 $r(A)$）也是 R 的理想。（提示：若存在 $x\in R$ 使 $x\cdot r(I)\notin r(I)$。考虑 $x\cdot r(I)+r(I)$。证明它是环 I 的理想且环 $r(I)$ 到环 $x\cdot r(I)+r(I)/r(I)$ 的对应 φ：$y\mapsto xy+r(I)$ $(y\in r(I))$ 是同态对应，从而得出矛盾。）

8．说根性质 r 有继承性（或理想继承性），如果对任意环 R 以及 R 的理想 I 有等式 $r(I)=I\cap r(R)$（即 I 的 r-根恰是 I 和 R 之 r-根之交）。试证若结合环类的一个根性质 r 具有性质：r-根环的理想仍是 r-根环，则根性质 r 具有继承性。

9．证明结合环的 B-根，K-根，L-根（J-根，BM-根）都具有继承性。

10．设 r 是根性质，证明 r-半单环的理想仍是 r-半单环。

11．结合环 R 的 r-根 $r(R)$ 等于 R 的所有使商环 R/I_a 为 r-半单的理想 I_a 之交，即 $r(R)=\bigcap_a I_a$，其中 R/I_a 是 r-半单的。

12．试证结合环的 K-根，L-根，J-根，BM-根具有局部次理想继承性，即是若 A 是环 R 的局部次理想（见第五章），则有 $r(A)=A\cap r(R)$，其中 $r=K,L,J$ 或 BM。

13．利用习题 12 对于任意域 F 上的 W-代数证明定理 5.5.1。

14．说一个结合环 R 是 W-环，如果对 R 的任意有限子集 X 必有 R 中的一个子环 A 满足下列三个条件：(一) $X\subseteq A$，(二) A 是 R 的局部次理想，(三) 环 A 本身是 Artin 环。证明 R 是 L-半单的 W-环当且仅当 R 是单 Artin 环的直和。

15．结合环 R 是素环当且仅当 R_n（环 R 上的 $n\times n$ 矩阵环）是素环。

16．若环 R 的 BM-根为 N，则 R_n 之 BM-根为 N_n。

17．对于 PI-代数，Koethe 问题有肯定的解决。试证明之。

第十章 Goldie 环

我们利用直和的构造方法和单代数类(单 Artin 环类)表示了有限半单代数(半单 Artin 环)，还利用亚直和的构造方法和一些特殊的素环类表示了 Jacobson 半单环，Baer-半单环，Koethe-半单环等等．这些重要结果启示我们，选择不同的构造方法，不同的特定环类，把两者结合起来而去刻划更广的环类，这是研究环的结构问题的一个重要方法．

在这一章内，讨论一类较 Noether 环更广的所谓 Goldie 环．给出素或半素的 Goldie 环的结构定理——Goldie 定理．它们在 Noether 环中所起的作用类似在 Artin 环中的 Wedderburn-Artin 定理．实际上可看作把后者推广到更广的一类环上去．这些结果是 Wedderburn, Artin, Jacobson 的环理论后又一类重要的结构定理．这里刻划半素 Goldie 环使用的是造分式环的构造方法(见§1)，使用的特定环类是半单 Artin 环，也就是说 Goldie 定理是用构造分式环的方法把半素 Goldie 环和半单 Artin 环连系起来．

§1 Ore 环

我们知道由整数环出发，用取元素对的方法可构造有理数域．与之完全一样的，由一个可换整域出发可构造它的分式域．把这一构造方法推广到非可换环上去，情形就有些不同而不是永远可行的了．

定义 10.1.1 环 R 中元素 a，如果它不是左零因子，也不是右零因子，就称之为正则元．

易见 a 是正则元当且仅当由 $axa=0$ 可推得 $x=0$．

定义 10.1.2 环 R 是环 Q 的子环．称 Q 是 R 的左分式环，如

果有

（一）R的每一个正则元在Q中有逆元（因而Q必须有单位元）；

（二）任意$x\in Q$，必有$x=a^{-1}b$，其中$a,b\in R$且a是正则元.（"左"是指在x的表示法中a^{-1}在左侧.）

此时我们也说R是Q的左次环.

如果R有左分式环Q. 任给$a,b\in R$，b是正则元，则依定义$b^{-1}\in Q$，$ab^{-1}\in Q$，再依定义中之(二)知$ab^{-1}=b_1^{-1}a_1$，其中$a_1,b_1\in R$而b_1是正则元. 这样在R中便有等式$b_1a=a_1b$.

定义 10.1.3 说环R是左 Ore 环，如果R含有正则元且满足下面条件（常称之为左 Ore 条件）：任给a，$b\in R$，b是正则元，则必$\exists a_1$，$b_1\in R$，b_1是正则元且$b_1a=a_1b$.

若是R没有零因子，左 Ore 条件等于说，R的任意两个非零元素a,b有共同的非零的左倍元（b_1a称作a的左倍元）.

上面的讨论说明左 Ore 条件是R有左分式环的必要条件. 为了证明它也是充分条件，先证

命题 1 设左 Ore 环R中所有正则元之集为M，则

（一）M关于乘法是闭的，且若$ax=ay$或$xa=ya$，x，$y\in R$，$a\in M$，必有$x=y$；

（二）若$a=cb$，a，$b\in M$，$c\in R$，则必$c\in M$.

证 （一）是易证的. 今证(二). 显然c没有左零化元. 欲证c也没有右零化元，设法让c出现在最右侧. 利用左 Ore 条件，有$a_1\in M$，$b_1\in R$，使$a_1b=b_1a$，这样就有$a_1b=b_1cb$. 由$b\in M$及（一），知$a_1=b_1c$. 再利用a_1的正则性，便知c无右零化子. 总起来便得$c\in M$. ∎

由命题 1 便知，在左 Ore 环R中，当a,b都是正则元时，必有正则元a_1，b_1，使$a_1b=b_1a$.

定理 10.1.1 环R有左分式环$\Longleftrightarrow R$是左 Ore 环.

证 "$\Rightarrow$"部分已在上面证过.

"$\Leftarrow$". 设R是 Ore 环. 令M为R中一切正则元的集. 令$W=$

$\{(a, b) | a \in R, b \in M\}$. 在 W 中引入关系~:$(a, b) \sim (c, d)$ 当且仅当有 $b_1, d_1 \in M$, 使 $d_1 a = b_1 c$, $d_1 b = b_1 d$. 今证 ~ 是一个等价关系. 由定义易见它是反身的和对称的.

设 $(a, b) \sim (c, d)$, $(c, d) \sim (e, f)$, 则依定义有 a_1, c_1, c_2、$e_2 \in M$, 使

$$c_1 a = a_1 c, \quad c_1 b = a_1 d,$$
$$e_2 c = c_2 e, \quad e_2 d = c_2 f.$$

对于正则元 a_1, e_2,依 Ore 条件及命题 1, 必有 a_3, $e_3 \in M$, 使 $a_3 e_2 = e_3 a_1$,故有

$$(e_3 c_1) a = e_3 a_1 c = a_3 e_2 c = (a_3 c_2) e,$$
$$(e_3 c_1) b = e_3 a_1 d = a_3 e_2 d = (a_3 c_2) f,$$

其中 $e_3 c_1$, $a_3 c_2$ 都是正则元,故$(a, b) \sim (e, f)$, 即 ~ 确是等价关系.

含元素 (a, b) 的等价类记作 a/b,其全体记作 Q.

下面的证明需要这样一个事实:若 $(a, b) \sim (a', b')$, 则对任意 x, $x' \in M$,若有 $xb = x'b'$, 则必也有 $xa = x'a'$. 这是因为, 依~的定义该有 c, $c' \in M$,使 $ca = c'a'$, $cb = c'b'$. 依 Ore 条件及命题1,有 e, $e' \in M$,使 $ex = e'c$. 此时由

$$ex'b' = exb = e'cb = e'c'b'$$

消去 b'(因为 b' 是正则元),便得 $ex' = e'c'$. 再由

$$ex'a' = e'c'a' = e'ca = exa$$

消去 e(因为 e 是正则元),便得 $x'a' = xa$,而这就是所要求的.

今规定 Q 中元素的加法和乘法运算:

$$a/b + c/d = (d_1 a + b_1 c)/b_1 d, \text{其中 } d_1 b = b_1 d, d_1, b_1 \in M. \quad (1)$$

$$a/b \cdot c/d = a_1 c/d_1 b, \text{其中 } d_1 a = a_1 d, \ d_1 \in M. \quad (2)$$

定义(1),(2)的合理性可如下面这样来证明. 设$(a, b) \sim (a', b')$, $(c, d) \sim (c', d')$,依(1)有

$$a'/b' + c'/d' = (d_1' a' + b_1' c')/b_1' d', \text{其中 } d_1' b' = b_1' d', d_1', b_1' \in M. \quad (3)$$

这样定义(1)的合理性就归结为去证明:

$$(d_1a+b_1c,\ b_1d)\sim(d_1'a'+b_1'c',\ b_1'd').\tag{4}$$

为此，对正则元 $b_1d, b_1'd'$ 应用 Ore 条件及命题 1，知有 $z, z'\in M$，使

$$zb_1d=z'b_1'd'.\tag{5}$$

因而依(1)，(3)也有

$$zd_1b=z'd_1'b'.\tag{6}$$

由(5)及刚证事实知 $zb_1c=z'b_1'c'$，由(6)及刚证事实则得 $zd_1a=z'd_1'a'$. 此两式相加便得

$$z(d_1a+b_1c)=z'(d_1'a'+b_1'c').\tag{7}$$

由(5)，(7)便得要证的(4). 类似地可验证定义(2)的合理性.

现在该验证 Q 对其中的加法、乘法作成一个结合环. 易见 $0/a=0/b, a,b\in M$ 是 Q 的零元而 $a/a=b/b$, $a,b\in M$ 是 Q 的单位元. 下面给出乘法结合律的证明，其余的则留给读者.

任给 Q 中三个元素 $b/a, d/c, f/e$，则依 Ore 条件有 c_1, b_1, e_1, d_1; $c_1, e_1\in M$ 使 $c_1b=b_1c$, $e_1d=d_1e$. 这样有

$$(b/a\cdot d/c)\cdot f/e=(b_1d/c_1a)\cdot f/e.\tag{8}$$

为了进一步计算(8)中右侧，先对元素 b_1, e_1 应用 Ore 条件而得元素 r, s, $s\in M$ 且 $re_1=sb_1$. 此时有

$$s(b_1d)=(sb_1)d=(re_1)d=r(e_1d)=r(d_1e)=(rd_1)e.$$

因而由(8)得

$$(b/a\cdot d/c)\cdot f/e=rd_1f/sc_1a.$$

另一方面，有

$$b/a\cdot(d/c\cdot f/e)=b/a\cdot(d_1f/e_1c).\tag{9}$$

但

$$(sc_1)b=sb_1c=re_1c=r(e_1c),$$

利用它计算(9)的右侧便得

$$b/a\cdot(d/c\cdot f/e)=rd_1f/sc_1a,$$

故得乘法的结合律.

最后，我们来证明 Q 是 R 的左分式环. 令

$$\rho: R\to Q$$

$$r \mapsto br/b$$

其中 b 是 M 中任意元素. 易证 $br/b=cr/c$, $\forall b,c\in M$, $r\in R$. 由之便得 ρ 的定义是合理的. 易证 ρ 是 R 到 Q 内的同态对应. 由于 $br/b=0/b$ 当且仅当 $r=0$, 故 ρ 还是 R 到 Q 内的同构对应. 由

$$b^2/b\cdot b/b^2=b/b^2\cdot b^2/b=b/b,\ \forall b\in M,$$

故 $(b^2/b)^{-1}=b/b^2$. 这样便有, 对于任意 $b\in M$, $\rho(b)^{-1}$ 存在且

$$a/b=b/b^2\cdot ba/b=(b^2/b)^{-1}(ba/b)=\rho(b)^{-1}\rho(a).$$

即证得 Q 是 $\rho(R)$ 的左分式环. 把 R 和 $\rho(R)$ 等同起来便得定理. ∎

在以后的讨论我们还需要下面的

定理 10.1.2 设 N 是左 R-模且当 $0\neq x\in N$ 而 a 是环 R 中正则元时 $ax\neq 0$. 若 R 有左分式环 Q, 则存在一个左 Q-模 P 以及加群 N 到加群 P 的一个同构嵌入 σ, 使得

(i) $1\cdot x=x$, $\forall x\in P$, 1 是 Q 的单位元;

(ii) $a\sigma(x)=\sigma(ax)$, $a\in R$, $x\in N$;

(iii) P 的任意元素都具有形式 $a^{-1}\sigma(x)$, 其中 $x\in N$ 而 $a\in R$ 是正则元.

证 在一切形式对 (n, a). $n\in N$ 而 $a\in R$ 是正则元, 所组成的集合 W 中引进关系～: $(u,a)\sim(v, b)$ 当且仅当 $b_1u=a_1v$, 其中 $a_1, b_1\in R$, a_1,b_1 是正则元且 $a_1b=b_1a$. 注意到 R 是 Ore 环以及 $ax\neq 0$, 其中 a 是 R 的正则元而 $0\neq x\in N$, 与上定理完全类似地可证此关系是等价关系. 按此等价关系, 由 W 所得的一切等价类 (记作 n/a) 的全体记作 P. 类似(1)式, 规定 P 中的加法:

$$n/a+m/b=(b_1n+a_1m)/a_1b, \tag{10}$$

其中 $a_1b=b_1a$, a_1,b_1 是 R 中正则元. 类似定义(2), 规定环 Q 对 P 的模运算: 设 $a/b\in Q$, $a,b\in R$,

$$a/b\cdot m/d=a_1m/d_1b, \tag{11}$$

其中 $d_1a=a_1d$, a_1, $d_1\in R$ 而 d_1 是 R 的正则元. 与上定理的证明完全类似的, 可得定义(10), (11)是合理的, 且 P 是左 Q-模并满足定理中的(i), (ii), (iii). ∎

容易证明, 左 Ore 环 R 的左分式环是唯一确定的, 即若 Q_1, Q_2

都是R的左分式环，则必$Q_1\cong Q_2$. 同样，关于定理10.1.2也有类似的唯一性结果.

§2 Goldie 环

我们来研究这样一个问题：当R属于某一特定环类时，R的左分式环Q具有些什么特征？当Q属于某一特定环类时，Q的左次环R具有些什么特征？以下认定R是Q的左次环.

预理 1 Q是R的左分式环，$a_1,\cdots,a_k$是R的正则元，则存在有R的正则元$b_1,\cdots,b_k$, a使$a_i^{-1}=a^{-1}b_i$, $i=1,\cdots,k$.

证 当$k=1$时，只需取$b_1=a_1, a=a_1^2$即得. 设对$a_1,\cdots,a_{k-1}$言有$b'_1,\cdots,b'_{k-1}$, a', 都是R中的正则元，且使$a_i^{-1}=a'^{-1}b'_i$, $i=1,\cdots,k-1$. 由于R是Ore环，因而在R中有正则元b_k, b使$b_ka_k=ba'$. 取$a=ba'$, $b_j=bb'_j$, $j=1,\cdots,k-1$, 则有$a_k^{-1}=a^{-1}b_k$以及

$$a_i^{-1}=a'^{-1}b'_i=a'^{-1}b^{-1}bb'_i=(ba')^{-1}(bb'_i)=a^{-1}b_i,$$
$$i=1,\cdots,k-1.$$

依归纳法便得预理. ∎

此预理说明在左分式环Q中，与交换情形类似，"通分"是可能的：若R中元a_i,b_i,a如预理1中所示，则对任意$c_i\in R$, 有

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^{-1}c_i=\sum_i a^{-1}b_ic_i=a^{-1}\sum_i b_ic_i.$$

这样，由之易见，若J是R的左理想，则$Q\cdot J$是Q的左理想，且其中元素都可表成$a^{-1}b$, $a\in R$, $b\in J$. 这一点下面将用到.

定义 10.2.1 说一个环A的左理想J_i, $i\in I$是无关的，如果它们都是非零的且$\sum_{i\in I}J_i=\sum_{i\in I}\oplus J_i$（左$R$-模的直和）.

预理 2 若R中非零左理想J_i, $i\in I$是无关的，则Q中左理想$Q\cdot J_i$, $i\in I$也是无关的.

证 由于Q有单位元，显然$Q\cdot J_i\neq 0$. 为了证明它们是无关

的，只需证明其中任意有限个，说是 $Q\cdot J_i$, $i=1,\cdots,n$，是无关的．

若 $x\in Q\cdot J_j\cap\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}Q\cdot J_i$，则由预理 1 以及其后面的说明，有

$$x=a^{-1}b_j=\sum_{i\neq j}a^{-1}b_i,\ \text{其中}\ a\in R,\ b_i\in J_i,\ i=1,\cdots,n.$$

由之便有 $b_j=\sum\limits_{i\neq j}b_i$．但 J_i 是无关的，故 $b_j=0$，即 $x=0$．故 QJ_i, $i=1\cdots,n$，是无关的．▎

定义 10.2.2 T 是环 A 的一个子集．令

$$Z_l(T)=\{x\in A\mid xT=0\},$$
$$Z_r(T)=\{x\in A\mid Tx=0\},$$

则 Z_l 是 A 的左理想，称之为 T 在 A 中的左零化子，或简称为 A 中的左零化子，或 A 的左零化子理想．类似地，称 Z_r 为 A 的右零化子理想．

由于不是任意左理想都能表成 $Z_l(T)$，故左零化子理想是一种特殊的左理想．

预理 3 若 J 是 R 的左零化子理想，则 $Q\cdot J$ 是 Q 的左零化子理想且 $J=Q\cdot J\cap R$．

证 依假设 $J=Z_l(T)$，$T\subseteq R$．显然 $(Q\cdot J)T=0$．反之任取 Q 中一元 $a^{-1}b$, a, $b\in R$，设 $a^{-1}bT=0$，则显然有 $bT=0$，即 $b\in J$，因而 $a^{-1}b\in QJ$．故在 Q 中有 $QJ=Z_l(T)$．因而有 $QJ\cap R=J$．▎

预理 2,3 说明，R 中左理想的无关性与 Q 中左理想的无关性是密切相关的，R 中左零化子理想与 Q 中左零化子理想是密切相关的．

作为回答开头提出的第二个问题，我们有

定理 10.2.1 （一）设 Q 是半单 Artin 环，则 Q 的左次环 R 有性质：

(i) 非零左理想组成的无关集都是有限的；

(ii) 对左零化子有极大条件；

(iii) 是半素环．

（二）设 Q 是单 Artin 环，则 Q 的左次环 R 有上面的性质(i)，(ii)以及(iv) R 是素环.

证 （一）设 Q 是半单 Artin 环，则 Q 对左理想有极大条件. 这样 Q 有性质(i)，(ii)，依预理 2，3，R 也有性质(i)，(ii). 为了证明 R 是半素的. 设 $N\neq 0$ 是 R 的幂零理想：$N^m=0, N^{m-1}\neq 0$. 易见 $QN^{m-1}Q$ 是 Q 的非零理想，依定理 6.2.4，它有生成元 e 且 e 是中心幂等元. 这样

$$e=\sum_i u_ia_iv_i,\quad u_i,\ v_i\in Q,\ a_i\in N.$$

利用预理 1，有 R 中正则元 a，使

$$e=\sum_i a^{-1}b_ia_iv_i=a^{-1}\sum_i b_ia_iv_i=a^{-1}\sum_i c_iv_i,$$

其中 $b_i\in R$，$b_ia_i=c_i\in N$. 这样

$$N^{m-1}ea=N^{m-1}ae=N^{m-1}\sum_i c_iv_i=0. \qquad (1)$$

但 a 是正则元，故由(1)便有 $N^{m-1}e=0$. 因而

$$(N^{m-1}Q)^2=N^{m-1}QN^{m-1}Q=N^{m-1}eQ=0.$$

但 Q 是半单 Artin 环，它没有非零的幂零单侧理想，故 $N^{m-1}Q=0$，即 $N^{m-1}=0$，这与前面假设是矛盾的，故 R 没有非零的幂零理想，即 R 是半素的.

（二）剩下来要证的是当 Q 是单 Artin 环时，R 必是素的. 为此只需证，若 A, B 是 R 的理想有 $BA=0$ 而 $A\neq 0$，必有 $B=0$. 此时显然 QAQ 是 Q 的非零理想. 因而由 Q 的单性知 $QAQ=Q$. 令 1 是 Q 的单位元，则

$$1=\sum_i u_ia_iv_i,\ a_i\in A,\ u_i,\ v_i\in Q.$$

依预理 1 可设 $u_i=b^{-1}d_i$，$b, d_i\in R$，$\forall i$，则有

$$b=\sum_i d_ia_iv_i\in AQ.$$

由 $Bb\subseteq BAQ=\{0\}$，故 $Bb=0$. 但 b^{-1} 存在，故 $B=0$. ▎

我们的目的是要讨论开头提出的第一个问题. 我们将证明定

理 10.2.1 的逆定理成立．为此先引入下面的

定义 10.2.3 称环 A 为左 Goldie 环，如果 A 有性质：(i) 左理想组成的无关集都是有限的；(ii) 对左零化子有极大条件．

易见，左 Noether 环是左 Goldie 环．

下面先讨论一下左零化子以及 Goldie 环的简单性质．

命题 1 (一) 若 I 是环 R 中的左零化子，并设右零化子 $S=Z_r(I)$，则有 $I=Z_l(S)$，因而 $S=Z_r(Z_l(S))$；

(二) 若 I_1，I_2 是环 R 中的两个左零化子且 $I_1\supset I_2$ 则 $Z_r(I_1)\subset Z_r(I_2)$；

(三) 对右零化子也有与(一)，(二)类似的结果．

证 (一) 依假设 $I=Z_l(T)$，$T\subseteq R$．由 $IT=0$ 得 $T\subseteq S$，由之便有 $Z_l(T)\supseteq Z_l(S)=Z_l(Z_r(I))\supseteq I=Z_l(T)$，故得 $Z_l(T)=Z_l(S)$．随之即得 $I=Z_l(S)$ 以及 $S=Z_r(Z_l(S))$．

(二)是(一)的推论，而由左右对称便得(三)． ▎

这样，环 R 的左(右)零化子理想永远可看做是右(左)零化子理想在 R 中的左(右)零化子．

命题 2 左 Goldie 环 R 对其中的右零化子有极小条件．

证 设在 R 中任取右零化子的降链：

$$S_1\supseteq S_2\supseteq\cdots\supseteq S_n\supseteq\cdots$$

依上面命题 1，设 $I_i=Z_l(S_i)$，则有 $S_i=Z_r(I_i)$ 且

$$I_1\subseteq I_2\subseteq\cdots\subseteq I_n\subseteq\cdots,$$

依 R 对左零化子有极大条件，故 $I_n=I_{n+1}=\cdots$，因而 $S_n=S_{n+1}=\cdots$． ▎

§ 3 Goldie 定理

我们来证明定理 10.2.1 的逆定理．

首先证明左 Goldie 素环 R 必是单 Artin 环的左次环．分成两种情况来讨论．提醒一下，整域是指没有零因子的环(不一定是交换的)．整域当然是素环．先证

命题 1 设R是左 Goldie 环且是整域，则R是 Ore 环．因而R有左分式环Q且Q是除环．

证 由于R的非零元素都是正则元，故欲证R是 Ore 环，即欲证R中任意两个非零元素a, b都有共同的非零左倍元$c=b_1a=a_1b$，只需证$Ra\cap Rb\neq 0$．这也就是要证，实际上对R中任意非零左理想I_1, I_2都有$I_1\cap I_2\neq 0$．

首先我们指出，在R中必有一个左理想$J\neq 0$，对R的任意非零左理想J_1, J_2，若有$J_i\subseteq J, i=1,2$，就必有$J_1\cap J_2\neq 0$．这是因为，假设这样的左理想不存在，则在R中必有两个非零左理想J_1, J_1'，有$J_1\cap J_1'=0$．同样在J_1'中必含有R的两个非零左理想J_2, J_2'，有$J_2\cap J_2'=0$．显然J_1, J_2, J_2'是无关的．这样继续作下去，便得无限多个非零左理想$J_1, J_2, \cdots$，其中任意有限个都组成无关集，因而其总体也是无关集，这和R是 Goldie 环是矛盾的．因而如上所说的J必存在．

在R中任取两个非零左理想I_1, I_2．任取$0\neq a\in J$．设$J_i=I_ia, i=1,2$．注意到R是整域，有$0\neq J_i\subseteq J, i=1,2$．因而$J_1\cap J_2=I_1a\cap I_2a\neq 0$．即有$b_1a=b_2a\neq 0, b_i\in I_i$．再由$R$是整域，得$0\neq b_1=b_2\in I_1\cap I_2$．这样便证得$R$是左 Ore 环．依定理 10.1.1，$R$有左分式环$Q$．由于$R$是整域，显然$Q$是除环．|

把素环的一些简单性质写在一起，以备引用．

预理 1 设A是素环，则(一) 非零左理想I与非零右理想J之交$I\cap J\neq 0$；(二) I是非零左理想，则$aI=0$必$a=0$，即$Z_l(I)=0$；(三) J是非零右理想，则$Ja=0$必$a=0$，即$Z_r(J)=0$．|

命题 2 设R是左 Goldie 环且R是有零因子的素环，则R有左分式环Q而Q是除环上的全矩阵环，即是单 Artin 环．

下面介绍的证明是 C. Procesi 给出的．由于单 Artin 环是素环且是 Goldie 环，因而这个证明实际上也给出了 Wedderburn-Artin 定理的另一个证法．这样，假若我们把命题 2 中的R就看作是单 Artin 环，就容易看清证明中某些步骤的思路．

命题 2 的证明将分写成几个预理．

取R中一切左零化子$Z_l(T)$，其中T含有非零元素．依Goldie环的第二个条件，它们中有极大元，取定其一，记作F．令$M=Z_r(F)$，依上节命题1，有$F=Z_l(M)$．依假设R有零因子，故$F\neq 0$．另一方面，$F\neq R$，否则R将有绝对零因子，这与R的素性是矛盾的．随之也有$M\neq 0$，$M\neq R$．这样F是极大左零化子而依上节命题1 M是极小右零化子．（若R是单Artin环，则可知其每一左理想都是左零化子，因而F就相当于极大左理想而M就是极小右理想．）

这样选定的F，M在整个证明中起重要作用，我们把它们的一些简单性质写成预理以便引用．

预理 2 （一）对任意$0\neq m\in M$，$F=Z_l(mR)$；（二）若$am=0$而$0\neq m\in M$，$a\in R$，则必$a\in F$．

证　由于R没有绝对零因子，故$mR\neq 0$．M是右理想，$mR\subseteq M$，故$Z_l(mR)\supseteq Z_l(M)=F$．由$F$的极大性便得$Z_l(mR)=F$．这就是(一)．(二)不过是(一)的另一种说法．❙

依预理1，$F\cap M\neq 0$．另一方面$F\cap M\neq M$，否则$MM\subseteq FM=0$，M将是幂零右理想，这与R的素性是矛盾的．易见$F\cap M$是M的一个理想．令$\overline{M}=M/F\cap M$．上面的讨论说明$\overline{M}\neq\overline{0}$．$M$当然可看做左$M$-模．又因$(F\cap M)M\subseteq FM=0$，故若规定

$$\overline{m}x=(m+F\cap M)x=mx,\ m\in M,\ x\in M,\ \overline{m}\in\overline{M},\qquad (1)$$

则M可看作左$\overline{M}$-模．

预理 3 设$m,n\in M$．若$mn\in F$，则或者$m\in F$或者$n\in F$．

证　依假设$mnM=0$．若$nM=0$，则$n\in Z_l(M)=F$．若$nM\neq 0$，则由预理2，得$m\in F$．❙

预理 4 设J_1，J_2是R中非零左理想且$J_1\cap J_2=0$，则$F\cap(J_1+J_2)\neq 0$．

证　设$F\cap(J_1+J_2)=0$．依预理1，$M\cap J_1\neq 0$．取$0\neq a\in M\cap J_1$．当$i=1$或2时，若$J_ia=0$，则依预理2及$a\in M$得$J_i\subseteq F$，这与$F\cap(J_1+J_2)=0$矛盾．故$J_ia\neq 0$，$i=1,2$．又由

$a\in J_1$，得 $J_ia\subseteq J_1$，$i=1,2$．由已知条件知 $(J_1a+J_2a)\cap J_2=0$．此时也有 $J_1a\cap J_2a=0$．这是因为，若 $c=c_1a=c_2a\in J_1a\cap J_2a$，$c_i\in J_i$，则 $(c_1-c_2)a=0$．依预理 2，$c_1-c_2\in F$．再依开头的假设 $F\cap(J_1+J_2)=0$，得 $c_1-c_2=0$．这样，$c_1=c_2\in J_1\cap J_2=0$，故 $c_1=c_2=0$，即 $c=0$．

至此，我们得 J_1a，J_2a，J_2 是无关的且 $F\cap(J_1a+J_2a)\subseteq F\cap J_1=0$．这样用 J_1a, J_2a 代替 J_1, J_2，便可以重复上述讨论．这便将得到无限多个形如 $J_2, J_2a, J_2ab, J_2abc, \cdots$ 的左理想，它们是无关的．这与 R 是 Goldie 环相矛盾．故得 $F\cap(J_1+J_2)\neq 0$． ❙

预理 5 （一）左 $\overline{M}$-模 M 有性质：若 $\bar{0}\neq\bar{m}\in\overline{M}$，$0\neq n\in M$，则 $\bar{m}n\neq 0$；（二）$\overline{M}$ 是 Ore 整域．

证 （一）若 $\bar{m}n=0$，则依定义(1)，$mn=0$．此时由预理 2 便知 $m\in F$，但这和 $\bar{m}\neq\bar{0}$ 是矛盾的，故 $\bar{m}n\neq 0$．

（二）由预理 3，知 $\overline{M}$ 是整域．为了证明 $\overline{M}$ 是 Ore 环，只要证 $\overline{M}$ 中任意两个非零元素 $\bar{m},\bar{n}$ 必有共同的非零的左倍元．显然 $m\notin F, n\notin F$．

若 $Rm\cap Rn\neq 0$，则有 $c=um=vn$，u，$v\in R$．由预理 1 得 $Mc\neq 0$．因而有 $d\in M$，使 $q=dc\neq 0$．当然有 $q\in M$，

$$q=dc=(du)m=(dv)n,\ du\in M,\ dv\in M. \tag{2}$$

这样有 $\bar{q}=\overline{du}\cdot\bar{m}=\overline{dv}\cdot\bar{n}$．若 $q\in F$，但已知 $m\notin F$，依预理 3 将有 $du\in F$，因而 $q=(du)m=0$，这与 $q\neq 0$ 是矛盾的．故 $\bar{q}\neq 0$，即 $\bar{m},\bar{n}$ 有共同的非零左倍元．

若 $Rm\cap Rn=0$，则由预理 4，有 $F\cap(Rm+Rn)\neq 0$．在此交集中取一非零元素 $c=um+vn$，u，$v\in R$．由预理 1 得 $Mc\neq 0$．故有 $w\in M, wc\neq 0$．这样

$$wc=(wu)m+(wv)n,\ wu, wv\in M \text{ 且 } wc\in M\cap F.$$

因而有 $\overline{wu}\cdot\bar{m}=\overline{-wv}\cdot\bar{n}=\bar{q}$．若 $\bar{q}=\bar{0}$，则由于 $\overline{M}$ 是整域，得 $\overline{wu}=\overline{-wv}=\bar{0}$，即 $wu\in F, wv\in F$．此时将有

$$wc=(wu)m+(wv)n=0+0=0.$$

这和 w 的选择是矛盾的．故这种情形 $\bar{m}$，$\bar{n}$ 也有共同的非零左倍元．▎

上面的重要预理以及定理 10.1.1 和定理 10.1.2 说明，$\overline{M}$ 有左分式环 $\bar{D}$ 且 $\bar{D}$ 是除环，而左 $\overline{M}$-模 M 可同构的嵌入左 $\bar{D}$-模 N 中（参看定理 10.1.2）．我们认定 $\overline{M}\subseteq\bar{D}$，$M\subseteq N$．

预理 6　N 是 $\bar{D}$ 上的有限维空间．

证　由定理10.1.2，N中元素都能写成 $\bar{a}^{-1}m$，$\bar{a}\in\overline{M}$，$m\in M$，故只需证在 M 中没有无限多个 $\bar{D}$-无关元素．设 $u_1,\cdots,u_k\in M\subseteq N$ 是 $\bar{D}$-无关元素，今证 $Ru_1,\cdots,Ru_k$ 必是 R 的左理想的无关集，由之，注意到 R 是 Goldie 环便得预理．依预理 1，$Ru_i\neq0$．若 Ru_i 不是无关的，则有

$$a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_ku_k=0,\tag{3}$$

$a_i\in R$ 而 a_iu_i 不全是零，不妨设 $a_1u_1\neq0$．依预理 1，$Ma_1u_1\neq0$，故有 $m\in M$，$ma_1u_1\neq0$．由之得 $m_1=ma_1\notin F$．用 m 左乘（3），并令 $m_i=ma_i$，则得

$$m_1u_1+m_2u_2+\cdots+m_ku_k=0,$$

亦即

$$\bar{m}_1u_1+\bar{m}_2u_2+\cdots+\bar{m}_ku_k=0.\tag{4}$$

由 $m_1\notin F$ 知 $\bar{m}_1\neq0$．故（4）和 $u_1,\cdots,u_k$ 是 $\bar{D}$-无关相矛盾，即得 $Ru_i,i=1,\cdots,k$，是无关的．▎

利用环 R 的乘法，R 的右理想 M 可看成右 R-模．M 又是左 $\overline{M}$-模．易见 M 的这两个模运算间有关系

$$(\bar{a}m)r=\bar{a}(mr),\ \bar{a}\in\overline{M},\ m\in M,\ r\in R.\tag{5}$$

也就是说 M 是 $(\overline{M},R)$-双模．

现在我们把右 R-模 M 扩大，使 N 也成为右 R-模．为此对 N 的元素 $\bar{a}^{-1}m$，$\bar{a}\in\overline{M}$，$m\in M$，规定

$$(\bar{a}^{-1}m)r=\bar{a}^{-1}(mr),\ r\in R.\tag{6}$$

为了说明定义(6)是合理的，需证明：当 $\bar{a}_1^{-1}m_1=\bar{a}_2^{-1}m_2$，$\bar{a}_1,\bar{a}_2\in\overline{M}$，$m_1,m_2\in M$时，必有$\bar{a}_1^{-1}(m_1r)=\bar{a}_2^{-1}(m_2r)$，$r\in R$．注意到$\overline{M}$ 是Ore

环，故有 $\bar{c}_1,\bar{c}_2\in\bar{M}$ 使 $\bar{c}_1\bar{a}_1=\bar{c}_2\bar{a}_2$。依定理 10.1.2 中的规定，有 $\bar{c}_1m_1=\bar{c}_2m_2$。因而 $(\bar{c}_1m_1)r=(\bar{c}_2m_2)r$。由 (5) 便得 $\bar{c}_1(m_1r)=\bar{c}_2(m_2r)$，而这就是 $\bar{a}_1^{-1}(m_1r)=\bar{a}_2^{-1}(m_2r)$。这样运算(6)使 N 成为右 R-模。

另一方面，已知 N 是左 $\bar{D}$-模。由(5)，(6)不难计算有

$$(\bar{d}v)r=\bar{d}(vr),\ \bar{d}\in\bar{D},\ v\in N,\ r\in R. \tag{7}$$

即 N 是一个 $(\bar{D},R)$-双模。(读者此时回顾一下我们在第六章中给出的 Wedderburn-Artin 定理的证明是有好处的。)

利用这个 $(\bar{D},R)$-双模 N，可以把 R 的元素和 $\bar{D}$ 上向量空间 $\bar{N}$ 的线性变换对应起来。即是，取 $r\in R$，令

$$\rho(r):N\to N$$
$$v\mapsto vr,$$

则由(7)知 $\rho(r)\in\mathrm{Hom}_{\bar{D}}(N,N)=Q$。再由 N 是右 R-模知

$$\rho:R\to Q=\mathrm{Hom}_{\bar{D}}(N,N)$$
$$r\mapsto\rho(r)$$

是 R 到 Q 内的同态对应。ρ 还是 R 到 Q 内的同构嵌入，这是因为，若 $\rho(r)=0$，则 $Nr=0$，因而 $Mr=0$。依预理 1 知 $r=0$。

由于 N 是除环 $\bar{D}$ 上的有限维空间，Q 当然是单 Artin 环。今证 Q 就是 R 的左分式环。先证

预理 7 设 L 是除环 D 上有限左空间 P 的线性变换环。$\alpha,\beta,\gamma\in L$。

(一) 若线性变换 α 的秩为 1，则 $\beta\alpha\gamma$ 的秩 $\leqslant 1$，且 $\beta\alpha\gamma=0$ 当且仅当或 $\beta\alpha=0$ 或 $\alpha\gamma=0$；

(二) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in L$ 都是秩为 1 的，还知 $\alpha_i^2\neq0$ 而当 $i>j$ 时 $\alpha_i\alpha_j=0$，则 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i$ 之秩为 k 且对任意 $x\in P$，$x\alpha=0$ 当且仅当 $x\alpha_i=0,i=1,\cdots,k$。

证 (一) 秩为 1 的线性变换 α 必可写成

$$x\alpha=\varphi(x)u,\ \forall x\in P,$$

其中 φ 是 P 上的非零线性函数而 u 是一个确定的非零向量．此时

$$x(\beta\alpha\gamma)=\varphi(x\beta)u\gamma,\ \forall x\in P. \tag{8}$$

由之得 $\beta\alpha\gamma$ 的秩$\leqslant 1$．当 $\beta\alpha\gamma=0$ 时，由 (8) 知或者 $u\gamma=0$，此时 $\alpha\gamma=0$，或者 $\varphi(x\beta)=0$，$\forall x\in P$，此时 $\beta\alpha=0$．反之，当 $\alpha\gamma=0$ 或 $\beta\alpha=0$ 时，显然有 $\beta\alpha\gamma=0$．

（二）如(一) 可把 α_i 写成

$$x\alpha_i=\varphi_i(x)u_i,\ \forall x\in P.$$

因此 $x\alpha_i\alpha_j=\varphi_i(x)\varphi_j(u_i)u_j$．利用已知条件便得

$$\varphi_i(u_i)\neq 0,\varphi_j(u_i)=0,\ 当\ i>j. \tag{9}$$

由(9)易知 $u_1,\cdots,u_k$ 是线性无关的．由

$$u_j\alpha=u_j\sum_i\alpha_i=\sum_i\varphi_i(u_j)u_i=\sum_{i=j}^{k}\varphi_i(u_j)u_i, \tag{10}$$

知 $P\alpha$ 中每一元必是 u_i 的线性和．注意到(9)，利用消元法解方程组(10)可得每一 u_i 必是 $u_j\alpha$ 的线性和，因而 $P\alpha$ 恰是 $u_i, i=1,\cdots,k$，支撑成的子空间，故 α 的秩 $=k$．

其次，$x\alpha=\sum_i\varphi_i(x)u_i=0$ 当且仅当 $\varphi_i(x)=0$，$\forall i$．因此 $x\alpha=0$ 当且仅当 $x\alpha_i=0$，$\forall i$． ∎

定义 10.3.1 称环 A 的左(右)理想 J 是稠密的，如果对 A 的任意非零左理想 I，$J\cap I\neq 0$．

预理 8 设 J 是 R 的稠密左理想而 ρ 是上面确定的 R 到 Q 内的同构映射，则 $\rho(J)$ 中含有非退化线性变换．

证 这就是要找 J 中元素 u，使线性变换 $\rho(u)\in Q$ 的秩等于 $\bar{D}$ 上左向量空间 N 的维数 n．

首先说明，若 $0\neq x\in M$，则 $\rho(x)$ 是秩为 1 的线性变换．因为由 $x\in M$ 得 $Mx=\bar{M}x$．这样 $N\rho(x)=Nx=(\bar{D}M)x=\bar{D}(Mx)=\bar{D}x$，把最后的 x 看作 N 中的元素，便知 $\rho(x)$ 是向量空间 N 的秩为 1 的线性变换．

其次，任取$0\neq x\in M$，依预理1有$Rx\neq 0$.依假设，得$Rx\cap J\neq 0$. 再依预理 1，$x(Rx\cap J)\neq 0$. 故可取$u_1=ax\in J$，使$xu_1=xax\neq 0$. 这样$\rho(u_1)\neq 0$. 由$\rho(x)$之秩为 1 得$\rho(u_1)$的秩为 1. 还知$\rho(u_1)^2\neq 0$. 为此只需证$u_1^2=axax\neq 0$. 若是$axax=0$，则$\rho(a)\cdot\rho(x)\rho(a)\rho(x)=0$.依上面预理7，或$\rho(a)\rho(x)\rho(a)=0$或$\rho(a)\cdot\rho(x)=0$，由之总将有$\rho(a)\rho(x)\rho(a)=0$，而这就是$axa=0$，与前面$xax\neq 0$是矛盾的，这样我们得到一个$u_1\in J$，$\rho(u_1)\neq 0$，$\rho(u_1)^2\neq 0$且$\rho(u_1)$的秩$=1$.

如果空间N的维数$n=1$，则已得预理.若$1<n$，则有$0\neq x_1\in N$，$x_1\rho(u_1)=x_1u_1=0$.注意到$N=\bar{D}M$，易见可认定这个$x_1\in M$.重复上面的讨论，可得$u_2=a_1x_1\in J$，$\rho(u_2)^2\neq 0$，$\rho(u_2)$的秩$=1$，且

$$\rho(u_2)\rho(u_1)=\rho(u_2u_1)=\rho(a_1x_1u_1)=0.$$

依预理 7，$\rho(u_1)+\rho(u_2)=\rho(u_1+u_2)$是秩为 2 的线性变换. 显然$u_1+u_2\in J$.

这样继续作下去，便有$u_1+\cdots+u_n\in J$而$\rho(u_1+\cdots+u_n)$是秩为n的，亦即是非退化的线性变换. ❙

预理 9 $\bar{D}$上向量空间N的每一个线性变换都具有形状$\rho(a)^{-1}\rho(b)$，其中$a,b\in R$且a是R中正则元.

证 令α是N的一个线性变换. 令

$$J=\{a\in R\mid\rho(a)\alpha\in\rho(R)\}. \tag{11}$$

易见J是左理想，今证J是稠密左理想. 为此，任取R的非零左理想I. 依预理 1，$I\cap M\neq 0$. 取$0\neq u\in I\cap M$. u是$M\subseteq N$中的元素，故有$u\alpha=\bar{d}^{-1}v$，其中$v\in M$，$\bar{0}\neq\bar{d}\in\bar{M}$，因而$d\in M$而$d\notin F$，由之得

$$v=\bar{d}(u\alpha)=(\bar{d}u)\alpha=(du)\alpha.$$

任取$x\in M$，注意到α是$\bar{D}$-线性变换且$du\in M$，则有

$$xv=x((du)\alpha)=\bar{x}((du)\alpha)=(\bar{x}(du))\alpha=(x(du))\alpha.$$

注意到x是M的任意元素而$N=\bar{D}M$，故把上式中的x看作是N中任意元素，它也是成立的. 这样便得

$$\rho(v)=\rho(du)\cdot\alpha.$$

由(11)知 $du\in J$．由于 $u\in I$，故 $du\in I$．由于 $d\notin F$，依预理 2 有 $du\neq 0$．总起来就有 $0\neq du\in J\cap I$，即证得 J 是稠密左理想．依预理 8，J 中含有元素 a，而 $\rho(a)$ 是非退化线性变换，这就是说 $\rho(a)\alpha=\rho(b)$，$b\in R$，亦即 $\alpha=\rho(a)^{-1}\rho(b)$．|

至此命题 2 就全部证完了．

把命题 1，和命题 2 以及上节的定理 1，合在一起便是

定理 10.3.1（关于素环的 Goldie 定理） 环 R 是单 Artin 环 Q 的左次环当且仅当 R 是 Goldie 素环．

§ 4 Goldie 定理（续）

在本节中 R 将用来表示左 Goldie 环且是半素环．

预理 1 A 是半素环，I，J 是 A 的理想，则 $IJ=0$ 当且仅当 $JI=0$．

证 若 $IJ=0$，则 $(JI)^2=JIJI=0$．但 A 无非零幂零理想，故 $JI=0$．|

令 $W=\{Z_l(I)\mid I$ 取遍 R 的非零理想$\}$．由于 R 是左 Goldie 环，故 W 中有极大元．令这些极大元的全体组成的集为 U．易见 $Z_l(I)$ 是 R 的理想，由于 R 是半素的，故 $Z_l(I)\neq R$，即 $R\notin U$．

预理 2 $B\in U$，则 B 是 R 的素理想．

证 设 I,J 是 R 的理想且 $IJ\subseteq B$．此时有

$$IJZ_r(B)\subseteq BZ_r(B)=0.\tag{1}$$

若 $JZ_r(B)=0$，则依 §2 命题 1，由 $Z_l(Z_r(B))=B$ 得 $J\subseteq B$．若 $JZ_r(B)\neq 0$，则由理想 $JZ_r(B)\subseteq Z_r(B)$ 得 $Z_l(JZ_r(B))\supseteq Z_l(Z_r(B))=B$．由 B 的极大性，即得 $Z_l(JZ_r(B))=B$，因而由 (1) 得 $I\subseteq B$．即证得 B 是 R 的素理想．|

预理 3 若 $B_1,B_2\in U$ 且 $B_1\neq B_2$，则

（一）$Z_r(B_1)\cap Z_r(B_2)=0$；

（二）$Z_r(B_1)\subseteq B_2$．

证 （一）若 $I=Z_r(B_1)\cap Z_r(B_2)\neq 0$，则 $Z_l(I)\supseteq Z_l(Z_r(B_i))=$

$B_i, i=1,2$. 由 B_i 的极大性，即得 $Z_l(I)=B_1=B_2$，这与 $B_1\neq B_2$ 的假设矛盾，故 $I=0$。

(二) $B_1Z_r(B_1)=0\subseteq B_2$。由 B_2 是素理想且 $B_1\nsubseteq B_2$，故 $Z_r(B_1)\subseteq B_2$。 ▎

预理 4 U 中只有有限个元素：B_i，$i=1,\cdots,n$，n 是自然数，且其交 $\bigcap_{i=1}^{n} B_i=0$。

证 设 $B_1\cdots,B_k$ 是 U 中不相同的元素. 我们来考察 $Z_r(B_i)$. 依上预理有

$$Z_r(B_i)Z_r(B_j)\subseteq Z_r(B_i)\cap Z_r(B_j)=0,\ i\neq j.$$

因而 $Z_r(B_i)\cap\sum_{j\neq i}Z_r(B_j)$ 是幂零理想. 由 R 的半素性知它为零，即 $Z_r(B_i), i=1,\cdots,k$，是无关的. 由 R 是 Goldie 环知，U 只能是有限集.

设 $B_1,\cdots,B_n$ 是 U 的全体元素. 设其交 $\bigcap_{i=1}^{n} B_i=I$，则 $I\left(\sum_{i=1}^{n}Z_r(B_i)\right)=0$. 依预理 1，有 $(\sum Z_r(B_i))I=0$. 这样 $\sum Z_r(B_i)\subseteq Z_l(I)$。若 $I\neq 0$，则 $Z_l(I)\in W$，因而有一个 B_i，说是 $B_1\supseteq Z_l(I)$。从而 $Z_r(B_1)\subseteq B_1$，随之 $Z_r(B_1)^2=0$。由 R 的半素性知 $Z_r(B_1)=0$，这和 $Z_l(Z_r(B_1))=B_1\neq R$ 是矛盾的。故 $I=0$。 ▎

预理 5 设 $B\in U$，则 $\overline{Z_r(B)}$ 是 $\bar{R}=R/B$ 中的稠密左理想.

证 取 $\bar{R}$ 的左理想 $\bar{J}\neq\bar{0}$。设 $\bar{J}$ 在自然同态对应 $R\to\bar{R}$ 下的完全逆象为 J，则 $J\supset B$。令 $J'=Z_r(B)J$。它是左理想且 $J'\subseteq Z_r(B)$。若有 $J'=0$，与预理 1 类似地可得 $JZ_r(B)=0$。由之 $J\subseteq Z_l(Z_r(B))=B$，这与 $J\supset B$ 是矛盾的，故 $J'\neq 0$。还知 $J'\nsubseteq B$，否则将有

$$J'J'\subseteq B(Z_r(B)J)=0.$$

从而 J' 是非零幂零理想，这与 R 的半素性矛盾。故 $\overline{J'}\neq 0$，即

$\overline{Z_r(B)}\cap\bar{J}\supseteq\bar{J}'\neq\bar{0}$. 故 $\overline{Z_r(B)}$是稠密左理想. ▎

预理 6 $B\in U$ 则 $\bar{R}=R/B$ 是 Goldie 素环.

证 由预理 2 知 B 是素理想, 故 $\bar{R}$ 是素环. 为了证明 $\bar{R}$ 是 Goldie 环, 取 $\bar{R}$ 中的一个左零化子 $\bar{J}=Z_l(\bar{T})$, 其中 $\bar{T}\subseteq\bar{R}$. 令 J, T 顺序为 $\bar{J}$, $\bar{T}$ 在自然同态对应 $R\to\bar{R}$ 下的完全逆像, 则有 $J=\{a\in R|aT\subseteq B\}$, 因而 $J=\{a\in R|aTZ_r(B)=0\}$, 即 $J=Z_l(TZ_r(B))$. 这样 $\bar{R}$ 中左零化子 $\bar{J}$ 的完全逆象 J 也是 R 中左零化子. 但 R 是Goldie 环, 故 $\bar{R}$ 对左零化子有极大条件.

其次取 $\bar{R}$ 中无关左理想集: $\bar{J}_i,i\in\Omega$. 令它们在 R 中的完全逆象为 $J_i,i\in\Omega$. 今考察 $J_i'=Z_r(B)J_i$, 则由预理 5 知, $J_i'\neq0$. 另一方面, 注意到 $J_i'\subseteq Z_r(B),\forall i\in\Omega$, 故

$$J_i'\cap\sum_{i\neq i}J_i'\subseteq B\cap Z_r(B).$$

但 $B\cap Z_r(B)$是幂零理想, 故等于零. 这样就得到, R 中左理想 $J_i',i\in\Omega$, 组成无关集. 但 R 是 Goldie 环, 故 Ω 只能是有限集, 即 $\bar{R}$ 中任意左理想无关集都是有限的. 总起来便得 $\bar{R}$ 是Goldie环. ▎

现在可以证明主要定理了.

定理 10.4.1 (关于半素环的 Goldie 定理) R 是半单 Artin 环的左次环当且仅当 R 是 Goldie 半素环.

证 定理中的"仅当"部分就是定理10.2.1. 我们来证另外一部分. 设 R 是半素环且是 Goldie 环. 依预理 3,4,6, R 是有限个 Goldie 素环 $\bar{R}_i=R/B_i,i=1,\cdots,n$ 的亚直和. 依 Goldie 关于素环的定理, $\overline{R_i}$ 有左分式环 $\bar{Q}_i$ 且 $\bar{Q}_i$ 是单 Artin 环. 我们认定 $\overline{R_i}\subseteq\bar{Q}_i$.

作 $\bar{Q}=\bar{Q}_1\oplus\cdots\oplus\bar{Q}_n$ 而把 $\bar{Q}$ 的元素记作向量 $(\bar{q}_1,\cdots,\bar{q}_n)$. 任取 $x\in R$, 令 $\bar{x}_i=x+B_i\in\bar{R}_i$. 规定

$$\rho: R\to\bar{Q}$$

$$x\mapsto(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)=\rho(x),$$

则 ρ 是 R 到 $\bar{Q}$ 内的同构嵌入. 易见, 若 $\rho(x)^{-1}$ 在 $\bar{Q}$ 内存在, 则 x 是 R 中的正则元.

我们来证明; 半单 Artin 环 $\bar{Q}$ 是 R 的左分式环.

首先证明，R 中任一正则元 a，$\rho(a)$ 在 $\bar{Q}$ 中有逆元．为此只需证明，对所有 i，$\bar{a}_i=a+B_i\in\bar{R}_i$ 是 $\bar{R}_i$ 中的正则元，因为这时，注意到 $\bar{Q}_i$ 是 $\bar{R}_i$ 的左分式环，$\bar{a}_i$ 在 $\bar{Q}_i$ 中将有逆元，从而 $\rho(a)=(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n)$ 在 $\bar{Q}$ 中也有逆元．对任意 $b\in R$，令 $\bar{b}_i=b+B_i\in\bar{R}_i$．

若 $\bar{a}_i\bar{b}_i=\bar{0}$，则 $ab\in B_i$，即 $abZ_r(B_i)=0$．由 a 的正则性得 $bZ_r(B_i)=0$，因而 $b\in B_i$，即 $\bar{b}_i=\bar{0}$．

若 $\bar{b}_i\bar{a}_i=0$，则 $ba\in B_i$，注意到也有 $Z_r(B_i)B_i=0$，故 $Z_r(B_i)ba=0$．与上面类似地可得 $\bar{b}_i=\bar{0}$．

这样就得 $\bar{a}_i$，$\forall i$，是 $\bar{R}_i$ 中的正则元．

其次证明，$\bar{Q}$ 中每一元素都具有形状 $\rho(a)^{-1}\rho(b)$，$a,b\in R$，a 是 R 的正则元．

为此，先讨论一下 $\bar{Q}_i$ 中元素的表示法．依预理 5，知 $\overline{Z_r(B_i)}$ 是 $\bar{R}_i$ 中的稠密左理想．依上节预理 8，知 $\overline{Z_r(B_i)}$ 中有正则元 $\bar{c}$．对 $\bar{Q}_i$ 中任意元素 $\bar{a}^{-1}\bar{b}$，其中 $\bar{a}$，$\bar{b}\in\bar{R}_i$ 而 $\bar{a}$ 是 $\bar{R}_i$ 中的正则元，我们有

$$\bar{a}^{-1}\bar{b}=(\bar{c}\bar{a})^{-1}(\bar{c}\bar{b}),$$

这里 $\bar{c}\bar{a}$，$\bar{c}\bar{b}\in\overline{Z_r(B_i)}$．这样 $\bar{Q}_i$ 中的任意元素都可写成 $\bar{a}^{-1}\bar{b}$，其中 $a,b\in Z_r(B_i)$，即只用 $Z_r(B_i)$ 中的元素就可以表示出 $\bar{Q}_i$ 中的元素了．

再由预理 3 知，$Z_r(B_1)\subseteq B_i$，$i=2,\cdots,n$．故对于任意 $x^{(1)}\in Z_r(B_1)$ 有

$$\rho(x^{(1)})=(\overline{x_1^{(1)}},\bar{0},\cdots,\bar{0}). \tag{2}$$

同样，对 $x^{(i)}\in Z_r(B_i)$ 有

$$\rho(x^{(i)})=(\bar{0},\cdots,\bar{0},\overline{x_i^{(i)}},\bar{0},\cdots,\bar{0}).$$

注意到上面刚作过的说明，对 $\bar{Q}$ 中的任意元素 $\bar{q}$，我们有

$$\bar{q}=(\overline{a_1^{(1)}}^{-1}\overline{b_1^{(1)}},\cdots,\overline{a_n^{(n)}}^{-1}\overline{b_n^{(n)}}),$$

其中 $a^{(i)},b^{(i)}\in Z_r(B_i)$．这样，若令

$$a=a^{(1)}+\cdots+a^{(n)},\quad b=b^{(1)}+\cdots+b^{(n)},$$

则 $a,b\in R$，再注意到(2)便有

$$\rho(a)^{-1}\rho(b)=(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n)^{-1}(b_1,\cdots,b_n)$$
$$=(\overline{a_1^{(1)}},\cdots,\overline{a_n^{(n)}})^{-1}(\overline{b_1^{(1)}},\cdots,\overline{b_n^{(n)}})=\bar{q}. \quad (3)$$

在(3)式的推导中也同时证明了 $\rho(a)^{-1}$ 的存在性. 这样 a 当然是 R 中正则元.

总起来便得 $\bar{Q}$ 是 R 的左分式环. ▎

在本章最后,我们介绍两个与上面证明的 Goldie 定理密切相关的两个结果而略去其证明.

定理(Faith-Utumi) 若 R 是除环 D 上全矩阵环 D_n 的左次环,则存在一个 D 的左次环 A 使得 $A_n\subseteq R\subseteq D_n$,其中 A_n 是整域 A 上的全矩阵环.

这个定理把单 Artin 环的左次环刻划得更精细一些.

定理(Goldie) 设 R 是右 Noether 环且是主左理想环 (即其每一左理想都是主左理想),则 $R=A\oplus B$,其中 A 是半素环且是主左理想环而 B 对左理想和右理想都有极小条件.

这些定理的证明,例如可在 Jacobson(2) 和 Herstein(1) 中找到.

习　题

1. 在构造左 Ore 环的左分式环 Q 时,给出 Q 中加法适合交换律以及乘法对加法有分配律的证明.

2. 设结合环 R 有单位元,无零因子,并对左理想有极大条件. 证明 R 是左 Ore 整域.

3. 设 Q 是环 R 的左分式环,I 是 R 的左理想. 证明: I 在 Q 中生成的左理想 $I'=\{c^{-1}x\mid x\in I,c\in R$ 且 c 是 R 的正则元$\}$.

4. 设 Q 是环 R 的左分式环,d 是 R 的正则元. 证明:对 R 的任意非零理想 K,均有 $K\cap dR\neq 0$.

5. 设环 R 有左分式环 Q,又有右分式环 S. 证明 Q 也是 R 的右分式环.

参 考 文 献

专 著

Albert, A. A. (1): Structure of Algebras, New York, 1939.

Amayo, R. K., Stewart, I. (1): Infinite-dimensional Lie Algebra, Noordhoff International Publ., 1974.

Anderson, F. W., Fuller, K. R. (1): Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1974.

Artin, E., Nesbitt, C. J.; Thrall, R. M (1): Rings with Minimum Condition, 1946.

Curtis, C. W., Reiner, I. (1): Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Interscience, New York-London, 1962.

Divinsky, N. (1): Rings and Radicals, Allen, London, 1965.

Faith, C.(1): Algebra: Rings, Modules and Categories, Vol. I. Grundlehren Math. Wiss., Vol. 190. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

(2): Algebra: Ring theory, Vol. II. 1976.

Goodearl, K. R. (1): Ring Theory; Nonsingular Rings and Modules, Marcel Dekker, Inc., New York, 1976.

Herstein, I. N. (1): Noncommutative Rings, John Wiley, 1968.

(2): Topics in Ring Theory, Univ. of Chicago Press, 1969.

Jacobson, N. (1): Theory of Rings, New York, 1943.

(2): Structure of Rings, AMS Colloquium Publ., Vol. 37, 1956, Second Edition 1964.

(3): *PI*-Algebras, An Introduction, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

(4): Lectures in Abstract Algebra, Vol. 1, New York, 1951.

Jans, J. P. (1): Rings and Homology, Holt, Rinehart and Winston, 1964.

Kaplansky, I. (1): Fields and Rings, Univ. of Chicago Press, 1969.

Lambek, J. (1): Lectures on Rings and Modules, Waltham: Blaisdell, 1966.

Lesieur, L., Croisot, R. (1): Algèbre noethèrienne noncommutative. Mem. Sci. Math. 154, 1963.

McDonald, B. R. (1): Finite Rings with Identity, Marcel Dekker., Inc., New York, 1974.

Passmann, D. S. (1): The Algebraic Structure of Group Rings, John Wiley, New York-London-Sydney-Toronto, 1977.

Procesi, C. (1): Rings with Polynomial Identities, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

Schafer, R. D. (1): An Introduction to Nonassociative Algebra, Academic Press, New York, 1966.

Stenström, B. (1): Rings of Quotients, An Introduction to Methods of Ring Theory, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

Szasz, F. (1): Radikale der Ringe, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975.

Жевлаков, К. А., Слинько, А. М., Шестаков, И. П., Ширшов, А. И. (1): Кольца. близкие к ассоциативным, «Наука», Москва, 1978.

万哲先 (1): 李代数，科学出版社，1964.

张禾瑞 (1): 结合代数讲义，油印本，北京师范大学，1957.

论 文

Abian, A. [1]: On the nilpotency of nil algebras, *Amer. Math. Monthly*, **74** (1967), 33—34.

Amitsur, S. [1]: Rings of quotients and Morita contexts, *J. Alg.*, **17** (1971), 273—298.

[2]: A general theory of radicals: I. *Amer. J. Math.*, **76** (1952), 774—786; II, **76** (1954), 100—125; III. **76** (1954) 126—136.

[3]: On the central division algebras, *Israel J. Math.*, **12** (1972), 408—420.

Artin, E. [1]: The influence of J. H. M. Wedderburn on the development of modern algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 65—72.

Artin, E., Whaples, G. [1] The theory of simple rings, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 87—107.

Baer, R. [1]: Radical ideals, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 537—568.

Bergman, G. M. [1]: A ring primitive on the right but not on the left, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 473—475.

Brown, B., McCoy. N. H. [1]: Radicals and subdirect sums, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 46—58.

[2]: The radical of a ring, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 495—499.

Goldie, A. W. [1]: The structure of prime rings under ascending chain conditions, *Proc. London. Math. Soc.*, **8** (1958), 598—608.

[2]: Semi-prime rings with maximum conditions, *Proc. London Math. Soc.*, **10** (1960), 201—220.

Hochschild, G. [1]: Semi-simple algebras and generalized derivations, *Amer. J. Math.*, **64** (1941), 677—694.

Hopkins, C. [1]: Rings with minimal conditions for left ideals, *Ann. of Math.*, **40** (1939), 712—730.

Jacobson, N. [1]: Structure theory of simple rings without finiteness assumptions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **57** (1945), 228—245.

[2]: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *Amer. J. Math.*, **67** (1945), 300—320.

[3]: On the theory of primitive rings, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 8—21.

[4]: Structure theory for algebraic algebras of bounded degree, *Ann. of Math.*, **46** (1945), 695—707.

[5]: Some recent developments in the theory of algebras with polynomial identities, *Topics in Algebra Proceeding*, Canberra, 1978, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

Kaplansky, I. [1]: On a problem of Kurosch and Jacobson, *Bell. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 496—500.

[2]: Rings with a polynomial identity, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 575—580.

[3]: Topological representations of algebras, II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **68** (1950), 62—75.

Levitzki, J. [1]: On the radical of a general ring, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 462—466.

[2]: On a problem of A. Kurosch, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 1033—1035.

McCoy, N. H. [1]: Subdirect sum representations of prime rings, *Duke Math. J.*, **22** (1955), 357—364.

Nagata, M. [1]: On the nilpotency of nil-algebras, *J. Math. Soc. Japan*, **4** (1953), 296—301.

Outcalt, D. L. [1]: Power-associative algebras in which every subalgebra is an ideal, *Pacif. J. Math.*, **20** (1967), 481—485.

Procesi, C., Small, L. [1]: On a theorem of Goldie, *J. Alg.*, **2** (1965), 80—84.

Sasiada, E. [1]: Solution of the problem of existence of a simple radical ring, *Bull. Acad. Polonaise Sci. Sèrie Math. Astr. Phys.*, **9** (1961), 257.

Sasiada, E., Cohn, P. M. [1]: An example of a simple radical ring, *J. Alg.*, **5** (1967), 373—377.

Sasiada, E., Sulinski, A. [1]: A note on Jacobson radical, *Bull. Acad. Polonaise Sci. Sèrie Math. Astr. Phys.*, **10** (1962), 421—423.

Shock, R. C. [1]: Nilsubrings in finite conditions, *Amer. Math. Monthly*, **78** (1971), 741—748.

Wedderburn, J. H. M. [1]: On hypercomplex numbers, *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2, **6** (1908), 77—117.

Андриянов, В, И. [1]: Периодические гамильтоновые кольца, *Мат. сб.*, **74** (1967), 241—261.

Андрунакиевич, В. А. [1]: К теории радикалов ассоциативных колец, *ДАН, СССР*, **113** (1957), 487—490.

[2]: Радикалы ассоциативных колец, *Матем. сб.*, **44** (86), (1958), 179—212.

Бобич, А. М. [1]: О радикале Левицкого, *ДАН СССР*, **126** (1959), 242—243.

Голод, Е. С. [1]: О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых группах, *Изв. АН СССР*, Сер. мат., **28** (1964), 273—276.

Голод, Е. С., Шафаревич, И. Р. [1]: О Башне полей классов, *Изв. АН СССР*, Сер. мат., **28** (1964), 261—272.

Курош, А. Г. [1]: Радикалы колец и алгебр, *Мат. сб.*, **33** (1953), 13—26.

[2]: Радикалы в теории групп, *Сиб. мат. ж.*, **3** (1962), 912—931.

[3]: Ringtheoretische Probleme, die mit dem Burnsidenschen Problem über periodische Gruppen in Zusammenhang stehen, *Bull. Akad. Sci. URSS*, Ser. Math., **5** (1941), 233—240.

Мальцев, А. И [1]: О разложении алгебры в прямую сумму радикала и полупростой подалгебры, *ДАН*, **36** (1942), 46—50.

Ширшов, А. И. [1]: О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах, *Мат. сб.*, **41** (1957), 381—394.

[2]: О кольцах с тождественными соотношениями, *Мат. сб.*, **43** (1957), 277—283.

Шнейдмюллер, В. И. [1]: Бесконечные кольца с конечными убывающими целями подколец, *Мат. сб.*, **27** (1950), 219—228.

王湘浩 [1]: 关于 Koethe 半单纯环，东北人民大学学报，**1** (1955)，143—147.

许永华 [1]: 环的极小条件等价于极大条件的充要性，数学学报，**20** (1977)，267—271.

[2]: 与线性变换的完全环同构的环理论（Ⅰ）数学学报，**22** (1979)，204—218；(Ⅱ) **22** (1979)，303—315；(Ⅲ) **22** (1979)，389—403；(Ⅳ) **22** (1979)，556—567；以及 (Ⅴ)，(Ⅵ)（将在数学学报上发表）。

[3]: A finite structure theorem between primitive rings and its application to Galois theory（将在数学年刊上发表）。

刘绍学 [1]: 无限代数的分解，北京师大学报（自然科学），第一期，(1956)，45—70（或 *Мат. сб.*, **42** (1957)，327—352）.

[2]: 关于一种有限非结合代数，北京师大学报，第二期，(1957)，47—52.

[3]: 每一子代数都是理想的代数，数学学报，**14** (1964)，532—537.

[4]: 每一子代数都是左理想的代数，北京师大学报，**3** (1979)，1—5.

[5]: 一类局部有限代数的 Wedderburn 结构定理，数学学报，**23** (1980)，942—952.

[6]: 多重算子群中的直因子，北京师大学报，**3** (1963)，**27—38**（或中国科学，**8**:11 (1964)，1735—1746）.

[7]: 广义 Hamilton 代数（将在数学学报上发表）。

柳孟辉 [1]: 完全可约的群及环的构造，中国数学学报，**1** (1951)，207—213.

谢邦杰 [1]: Baer 根环与零化子适合链条件之诣零环，东北人民大学学报，**1**(1955)，71—91.

[2]: 近似诣零理想与根，同上学报，**1** (1956)，31—49.

[3]: 非结合环之 Koethe 根，Koethe 半单纯性与近似诣零根，同上学报，**1** (1957)，19—26.

[4]: 算子群的容许子群链，数学学报，**7** (1957)，631—640（或中国科学 **7** (1958)，704—715）.

[5]: 关于 S-不可约代数，科学记录，**10** (1958)，379—382.

[6]: 关于 Jacobson 的一个问题，吉林大学学报，**2** (1963)，289—293.

[7]: 一般的核环与有核环的结构，同上学报，**2** (1964)，65—84.

[8]: Rings with semi minimum condition，中国科学，**3** (1965)，343—362.

索　引

六 画

七 画

八 画

九 画

十 画

十一画

十二画

十三画以上

其 他